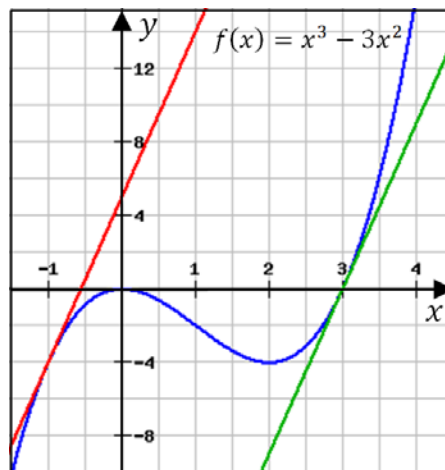


## UPPGIFTER

## KAPITEL 2 ÄNDRINGSKVOT OCH DERIVATA

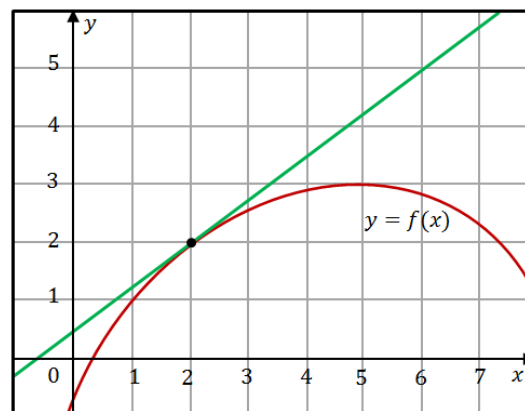
## KAPITEL 3 DERIVERINGSREGLER

1. Figuren visar grafen till funktionen  $f$  där  $f(x) = x^3 - 3x^2$ . I punkter där  $x$ -koordinaterna är  $-1$  respektive  $3$  är tangenter till kurvan ritade.



I figuren ser det ut som att tangenterna är parallella. Undersök om de är parallella.

2. Figuren visar grafen till en funktion  $y = f(x)$  och tangenten i den punkt på kurvan där  $x = 2$ . Bestäm  $f'(2)$ .



3. Bestäm  $f'(x)$  då  $f(x) = x^2 - x^3$ .

4. Använd derivatans definition och bestäm derivatan till funktionen nedan där  $A$  är en konstant.

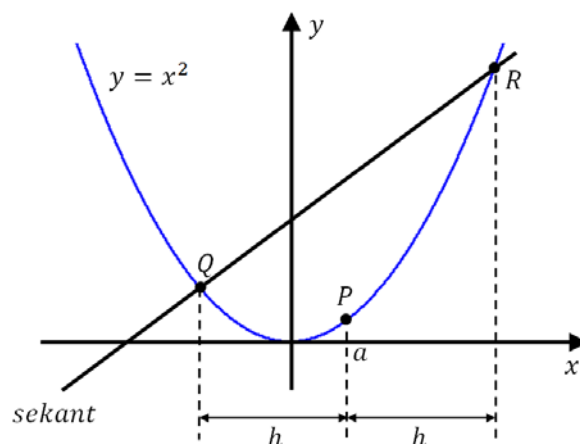
$$f(x) = \frac{A}{x}$$

5. Vikten  $y$  hos en växande pumpa är en funktion av tiden  $t$ , dvs.  $y = f(t)$ . Vikten  $y$  mäts i  $kg$  och tiden  $t$  i dygn.

Vad får man veta genom att bestämma  $f'(10)$ ? Välj ett av alternativen a) till e).



- a) Den vikt i  $kg$  som pumpan har vid tiden 10 dygn.  
 b) Pumpans viktökning i  $kg$  under 10 dygn.  
 c) Den tid det tar för pumpans vikt att öka med  $10 \text{ kg/dygn}$ .  
 d) Pumpans viktsökning i  $kg/dygn$  vid tiden 10 dygn.  
 e) Den tid det tar för pumpans vikt att öka till 10  $kg$ .
6. Figuren visar grafen till funktionen  $y = x^2$  och en rät linje (sekant) som går genom punkterna  $Q$  och  $R$  på kurvan. Punkten  $P$  ligger också på kurvan och har  $x$ -koordinaten  $a$ . Avståndet i  $x$ -led mellan punkterna  $Q$  och  $P$  är lika stort som avståndet i  $x$ -led mellan punkterna  $P$  och  $R$ . I figuren betecknas detta avstånd med  $h$ .



Visa att riktningskoefficienten till sekanten alltid är lika stor som riktningskoefficienten för tangenten till kurvan i punkten  $P$ .

7. Ge ett exempel på en funktion  $f$  som har egenskapen  $f'(0) = 1$ . Endast svar fordras.

8. För funktionen  $f$  gäller att derivatan  $f'(x) = 2x$ . Bestäm värdet på

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

9. Skissa grafen till en funktion  $f$  för vilken det gäller att  $f(10) = 25$  och  $f'(10) = 0$ .

10. Det finns flera funktioner för vilka det gäller att  $f(0) = 20$  och  $f'(0) = 20$ . Bestäm en sådan funktion.

11. Grafen till funktionen  $f(x) = \sqrt{2x-1}$  har en tangent i punkten  $(5,3)$ . Tangentens ekvation är:

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

a) Vilket värde har  $f(5)$ ?

b) Vilket värde har  $f'(5)$ ?

12. Grafen till en andragradsfunktion  $f$  har sin maximipunkt för  $x = 2$ .

Är värdet för  $f'(3)$  positivt, negativt eller noll?

13. Bestäm  $s'(3)$  då  $s(x+h) = s(x) + h$ .

14. Derivera  $f(x) = \frac{x}{4}$ .

15. För funktionen  $f$  gäller att  $f(x) = e^x + 2$ . Bestäm koordinater för den punkt på funktionens graf då  $f'(x) = e$ .

16. Derivera följande funktioner:

a)  $f(x) = e^x$

b)  $f(x) = ex$

c)  $f(x) = x^e$

17. Derivera följande funktioner:

a)  $f(x) = 2x^4 + 3x^2$

b)  $f(x) = e^{-5x}$

c)  $f(x) = x/7$

18. För en funktion  $y = f(x)$  är derivatan  $f'(x) = x^2 + 2x - 10$ . Bestäm de värde på  $x$  för vilka grafen till  $y = f(x)$  har en tangent med riktningskoefficienten 5.

19. För tangenten  $f$  gäller att  $f(x) = x^4 - 420x^2 + 16x$ . Hur många punkter på funktionens graf har en tangent med riktningskoefficienten 16?

20.  $g$  och  $f$  är två funktioner. Grafen till funktionen  $g$  tangerar grafen till funktionen  $f$  i punkten där  $x = a$ .

Vilka två av nedanstående alternativ a) till f) måste då *alltid* vara uppfyllda?

a)  $f'(a) = g(a)$

b)  $f(a) = g'(a)$

c)  $f'(a) = 0$

d)  $f(a) = g(a)$

e)  $f'(a) = g'(a)$

f)  $g'(a) = 0$

21. Bestäm  $f'(0,5)$  då  $f(x) = 5e^{2x}$ . Svara exakt.

22. Punkten  $P$  ligger på grafen till en funktion  $f$ . Grafens lutning i punkten  $P$  är:

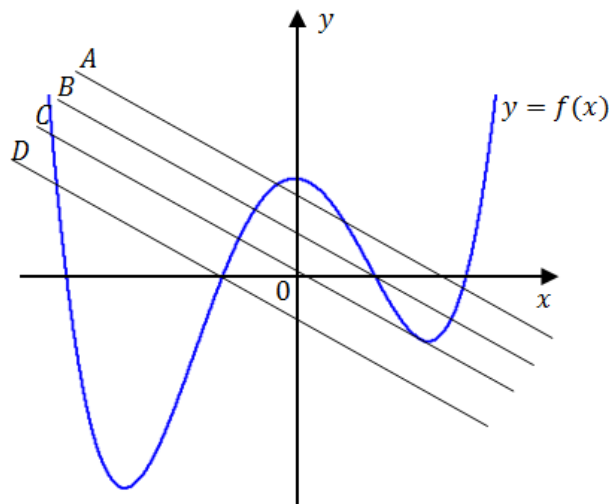
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{((2+h)^4 + (3(2+h))) - (2^4 + 6)}{h} = 35$$

Vilka koordinater har punkten  $P$ ?

23. Olle springer en 100-meters lopp. Den sträcka  $s(t)$  meter som han sprungit är en funktion av tiden  $t$  sekunder efter start.

- Förklara vad  $s'(6) = 8$  betyder i detta sammanhang?
- Vilka av linjerna  $A$  till  $D$  är en tangent till kurvan  $y = f(x)$ ?

24. Vilka linjerna  $A$ - $D$  är en tangent till kurvan  $y = f(x)$ ?



25. Derivera

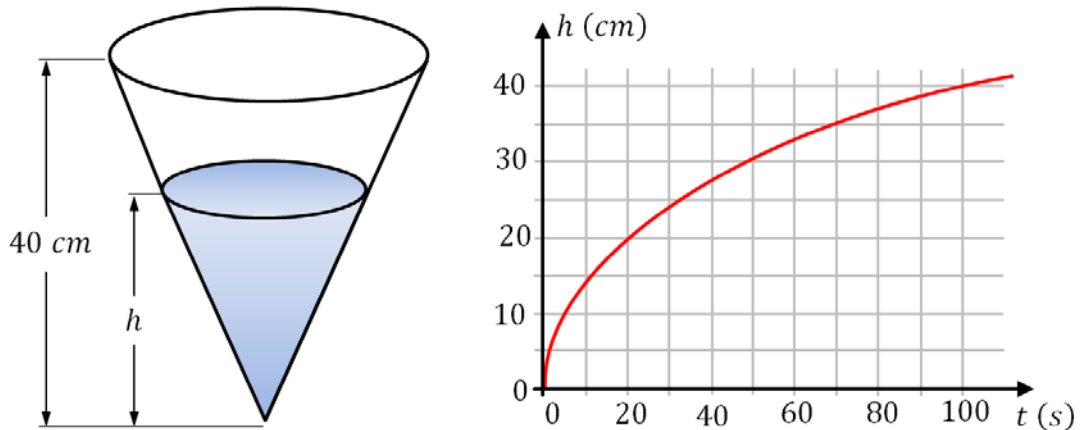
- $f(x) = 2x^3 - 5x$
- $g(x) = e^{2x} + 7$

26. Nedan ges derivatans värde hos en funktion  $f$  i en given punkt  $P$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{((2+h)^5 + 3) - (2^5 + 3)}{h} = 80$$

- Ange funktionen  $f$ .
- En tangent dras i punkten  $P$ . Bestäm tangentens ekvation.

27. En konisk behållare fylls med vatten. Diagrammet visar hur vattennivåns höjd  $h$  i centimeter beror av tiden  $t$  i sekunder.



- Det tar 100 sekunder att fylla behållaren. Med vilken medelhastighet ökar vattennivåns höjd  $h$  under tidsperioden  $10 \leq t \leq 100$ ?
- Tolka vad  $h'(50) = 0,20$  betyder i detta sammanhang, det vill säga då konen fylls med vatten.

28. För funktionen  $f$  gäller att  $f(x) = e^x$ .

Vilket av följande påståenden  $a$ ) till  $e$ ) är korrekt.

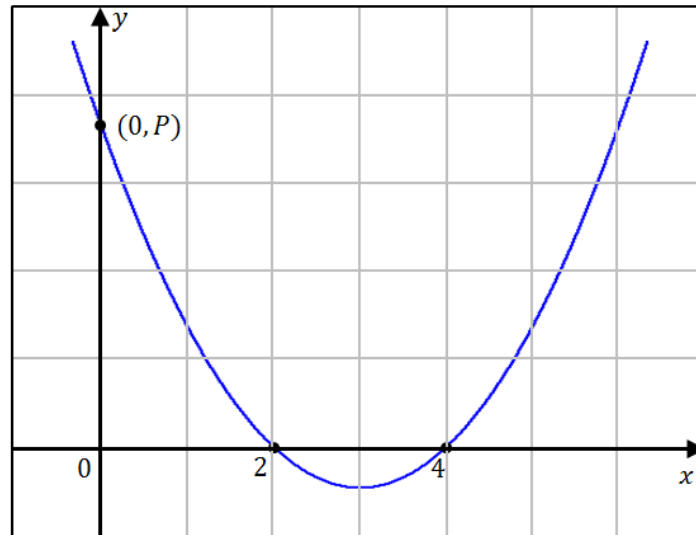
- $f$  är en exponentialfunktion med basen  $e$  där  $e \approx 1,718$ .
- $f$  har egenskapen att för alla  $x$  gäller att  $f'(x) = f(x)$ .
- $f$  har en graf som går genom punkten  $(1, 0)$ .
- $f$  är avtagande för  $x < 0$  och växande för  $x > 0$ .
- $f$  har egenskapen att  $f'(1) = 0$ .

29. För andragradsekvationen  $f$  gäller att  $f(x) = k(x - a)(x - b)$  där  $k \neq 0$ .

0/2/□

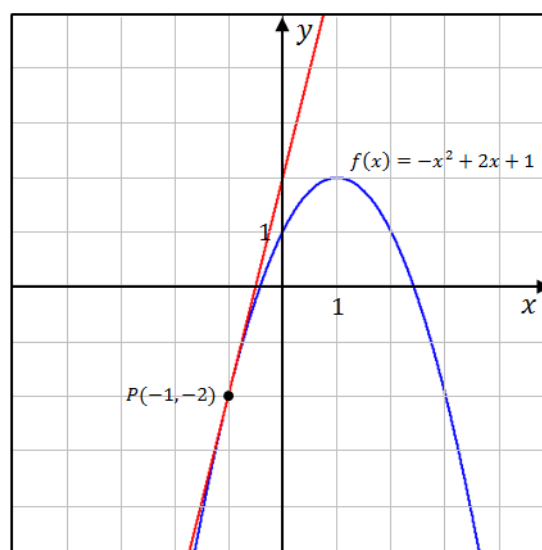
- Visa algebraiskt att  $f'(a) + f'(b) = 0$ .
- Vilka slutsatser drar du av resultatet i a)?

30. Nedan visas grafen till en andragradsfunktion som har nollställena  $x_1 = 2$  och  $x_2 = 4$ . Grafen skär y-axeln i punkten  $(0, P)$ .



Anta att vi drar en tangent till grafen i punkten  $(0, P)$ . Bestäm lutningen för denna tangent uttryckt i  $P$ .

31. I figuren visas grafen till funktionen  $f(x) = -x^2 + 2x + 1$  och en tangent som går genom punkten  $P = (-1, -2)$ .



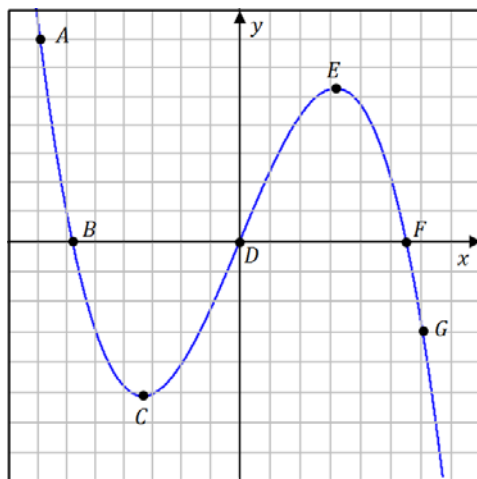
- a) Bestäm  $f'(-1)$ . Endast svar fordras.  
 b) För vilket värde på  $x$  gäller att  $f'(-1) = -4$ ? Endast svar fordras.

32. För punkten  $P$  gäller att  $P = (0, a)$ .

Visa för vilka värden på  $a$  som kurvan  $y = -3x^2 + 6x$  har en tangent som går genom punkten  $P$ .

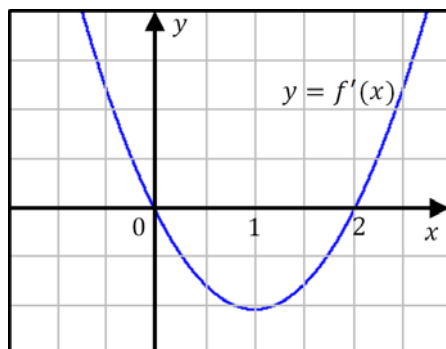
0/2/□

33. I figuren nedan visas huvuddragen till grafen  $y = f(x)$ .



- I vilka punkter A-G på grafen gäller att  $f'(x) < 0$ ?
- I vilka punkter A-G på grafen gäller att  $f'(x) = 0$ ?
- I vilka punkter A-G på grafen gäller att  $f'(x) > 0$ ?
- Hur många lösningar har ekvationen  $f(x) = 0$ ?
- Hur många lösningar har ekvationen  $f'(x) = 0$ ?

34. I bilden visas grafen till derivatan  $y = f'(x)$ . Derivatans är en andragsgradsfunktion.



Det finns flera funktioner som har en derivata vars graf ser ut som den i bilden.

Skissa grafer till några av dessa funktioner i ett och samma koordinatsystem. Motivera varför dina grafer har detta utseende.



35. Olle är ute på en träningsrunda med sin cykel. Han kommer fram till en uppförsbacke och  $t$  sekunder senare har han cyklat  $s(t)$  meter uppför backen.



- a) Förklara vad  $s'(t)$  betyder i detta sammanhang.  
 b) Förklara vad  $\frac{s(8) - s(0)}{8 - 0}$  betyder i detta sammanhang.  
 c) Den sträcka som Olle cyklar efter en viss tid kan beskrivas i ett diagram.

I vilket av diagrammen A-D nedan gäller det att  $s'(4) = \frac{s(8) - s(0)}{8 - 0}$ ? Förklara

