MATEMATISKA RÖRELSEBESKRIVNING

Då ett föremål rör sig är dess läge s alltid en funktion av tiden t:

$$s = s(t)$$

Den matematiska innebörden av momentanhastigheten är gränsvärdet för kvoten $\Delta s/\Delta t$, när Δt går mot noll:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Men detta känner vi igen som definition på en derivata. *Momentanhastigheten är tidsderivatan av förflyttningen*:

$$v = s'(t)$$

Den matematiska definitionen på begreppet momentanacceleration är också ett gränsvärde:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Momentanaccelerationen är alltså *derivatan* av den funktion som beskriver *hastigheten* vid olika tidpunkter:

$$a = v'(t)$$

Eftersom hastigheten i sin tur är derivatan av förflyttningen, kan accelerationen skrivas:

$$a = s''(t)$$

Momentanaccelerationen är *andraderivatan* av förflyttningen. Så snart man känner ett föremåls läge som funktion av tiden, kan man alltså genom att derivera denna funktion bestämma både hastigheten och accelerationen vid godtyckliga tidpunkter.

Vi ska tillämpa den matematiska modellen på några enkla exempel.

1. Vid en viss rätlinjig rörelse är läget proportionellt mot tiden:

$$s = kt$$

Hur stor är hastigheten och accelerationen?

$$v = s'(t) = k$$
$$a = v'(t) = 0$$

Hastigheten är alltså konstant och lika med proportionalitetskonstanten k. Accelerationen är noll. Rörelsen är *likformig*.

2. Vid en annan rätlinjig rörelse är läget s en andragradsfunktion av tiden:

$$s = At + Bt^2$$

där A och B är konstanter med kända värden.
Vilken är hastigheten och accelerationen? Hastigheten är:

$$v = s'(t) = A + 2Bt$$

Genom att i detta uttryck sätta $t = 0$ får vi värdet på utgångshastigheten v_0:

$$v_0 = A$$

Vidare får vi accelerationen:

$$a = v'(t) = 2B$$

Accelerationen är alltså konstant. Rörelsen är *likformig accelererad*. Sätter vi in ingångshastigheten $v_0 = A$ och accelerationen $a = 2B$ i uttrycket för v och s får vi de välkända formlerna:

$$v = v_0 + at$$
$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

3. Vi förutsätter en rörelse med konstant acceleration och härleder de uttryck som då gäller för v och s.

$$a = konstant = k$$

Vi vet att $v'(t) = a$. Vilken hastighetsfunktion $v(t)$ skall man derivera för att få konstanten a? Denna hastighetsfunktion $v(t)$ vars derivata är den konstanta accelerationen är den primitiva funktionen till accelerationsfunktionen $a = k$, dvs.:

$$v(t) = at + b$$

Vilken innebörd har konstanten b? Vi sätter $t = 0$ och får:

$$v_0 = b$$

Konstanten b är alltså lika med utgångshastigheten v_0, och vi kan skriva:

$$v = v_0 + at$$

Funktionen v är i sin tur derivatan av en lägesfunktion $s(t)$, som är en primitivfunktion till hastighetsfunktionen och måste ha följande utseende:

$$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2} + c$$

där c är en konstant. Om vi förutsätter att läget s är noll vid tiden $t = 0$, får vi:

$$s(0) = c = 0$$

Lägesfunktionen är således:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Vi har utfört en matematisk härledning av formlerna vid likformig accelererad rörelse.