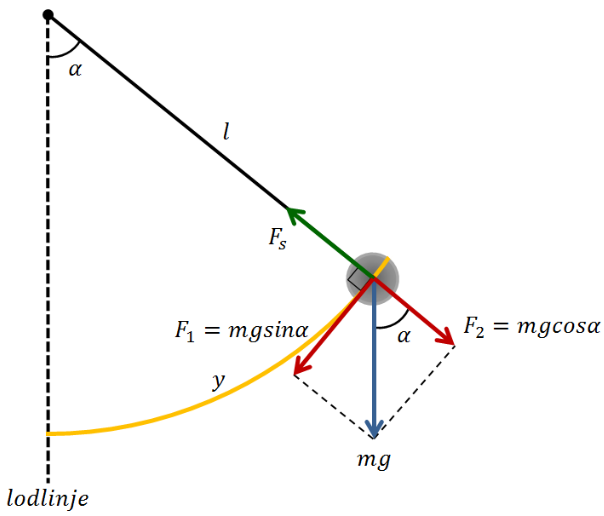
Matematisk pendel

Det finns många sorters pendlar. Den enklaste formen består av en vikt som hängs upp i ett snöre och svänger i ett plan. Denna enkla pendel kallas matematisk pendel. Om man drar ut vikten från sitt jämviktsläge och släpper den så pendlar den fram och tillbaka.

Vi ritar upp de krafter som verkar på pendelvikten. Tyngden på pendelvikten mg delas i två vinkelräta komposanter. En komposant $F_2 = mgcos\alpha$ som motverkar spännkraften i snöret och håller vikten kvar i sin cirkelbana och en komposant $F_1 = mgsin\alpha$ som är den återförande kraften och accelererar vikten utefter cirkelbågen.



Om räknar vinkeln α i radianer får vi följande samband mellan pendellängden l, elongationen y och utslagsvinkeln α:

$$y = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi l = \alpha \cdot l \Rightarrow \alpha = \frac{y}{l}$$

Då får vi:

$$F_R = F_1 = -mgsin\left(\frac{y}{l}\right)$$

Enligt Newtons andra lag gäller då:

$$F_R = -mgsin\left(\frac{y}{l}\right) = ma$$

I det här fallet sker rörelsen utefter cirkelbågen, vilket innebär att y anger viktens läge. Deriverar vi läget y två gånger får vi viktens acceleration, det vill säga $a = y''$. Det innebär att

$$-mgsin\left(\frac{y}{l}\right) = my''$$

Vilket ger

$$y'' + gsin\left(\frac{y}{l}\right) = 0 \qquad (1)$$

Det är en differentialekvation som saknar exakt lösning. Men om utslagsvinkeln α är liten kan vi skriva om ekvation (1) enligt nedan:

$$y'' + gsin\left(\frac{y}{l}\right) = 0 \Longrightarrow \left\{sin\left(\frac{y}{l}\right) \approx \frac{y}{l}\right\} \Longrightarrow y'' + g \cdot \frac{y}{l} = 0$$

eller

$$y'' + \frac{g}{l}y = 0 \qquad (2)$$

Om vi jämför ekvation (2) med differentialekvationen för periodiska svängningsrörelser i ett fjäder-vikt system, får vi

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Longrightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Periodtiden för en matematisk pendel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

där l är pendelns längd i m och g är tyngdaccelerationen i m/s^2.

Alternativt kan vi härleda periodtiden T för en matematisk pendel genom att använda oss av likformiga trianglar som uppstår när vi studerar pendelrörelsen.

Ur de två likformiga trianglar i figuren får vi:

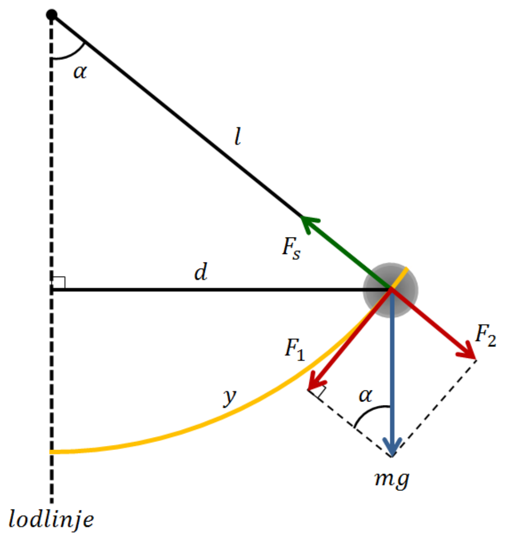
$$\frac{F_1}{mg} = \frac{d}{l}$$

Storleken av kraften F_1 är alltså:

$$F_1 = \frac{mg}{l} \cdot d$$

Om svängningens amplitud är mycket mindre än pendellängden l, kommer vinkeln α i varje läge under svängningen att vara liten, och sträckan d kommer att vara i det närmaste lika stor som elongationen y. Vid pendelsvängningar med små utslagsvinklar kan vi därför skriva:

$$F_1 = \frac{mg}{l} \cdot y$$



Under dessa förhållanden är den återförande kraften F_1 proportionell mot elongationen y, och pendelrörelsen är en mekanisk svängning. Proportionalitetskonstanten mg/l motsvarar fjäderkonstanten k vid en fjädersvängning.

Därmed får vi följande uttryck för svängningstiden T hos en matematisk pendel med liten utslagsvinkel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}$$

alltså

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$