

## 1 Rörelse och krafter

101. Man bör dra vinkelrätt mot verktyget.  
Kraften  $F$  beräknas då genom att

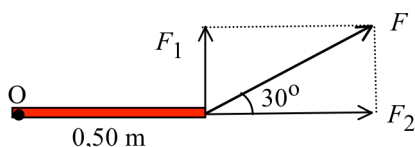
$$\text{momentet } M = F \cdot l \Rightarrow F = \frac{M}{l} = \frac{110}{0,45} \text{ N} = 244 \text{ N}$$

Svar: 240 N

102. a) Maximalt moment får Ebba i de ögonblick då kraften är vinkelrät mot pedalveven. Då är momentet  
 $M = F \cdot l = mg \cdot l = 45 \cdot 9,82 \cdot 0,18 \text{ Nm} = 80 \text{ Nm}$   
 b) När pedalveven är parallell med kraften, dvs. då trampen är i sitt övre eller sitt nedre läge är momentet noll.

Svar: a) 80 Nm b) 0 Nm

103. a) Om kraften är vinkelrät mot stången är momentarmen 0,50 m och  $M = F \cdot l = 10 \cdot 0,50 \text{ Nm} = 5,0 \text{ Nm}$   
 b) Om kraften är parallell med stången är momentarmen noll. Kraften utövar inget vridande moment. Momentet  $M = F \cdot l = 10 \cdot 0 \text{ Nm} = 0 \text{ Nm}$   
 c) Om vinkeln mellan kraft och stång är  $30^\circ$ , kan man lämpligen dela upp kraften i två komponenter,  $F_1$  som är vinkelrät mot stången och  $F_2$  som är parallell med stången. Se figur. Momentet är då  $M = F_1 \cdot l =$   
 $= F \cdot \sin 30^\circ \cdot 0,50 \text{ Nm} = 10 \cdot \sin 30^\circ \cdot 0,50 \text{ Nm} =$   
 $= 2,5 \text{ Nm}$



Svar: a) 5,0 Nm b) 0 Nm c) 2,5 Nm

104. En kropp är i jämvikt om resultanten till alla på kroppen verkande krafter är noll och de sammanlagda momenten med avseende på vilken momentpunkt som helst är noll. Detta brukar kallas kraftjämvikt resp. momentjämvikt.

105. Man klämmer åt i tångens ändar med kraften 20 N och momentarmen är 0,15 m. Då vrids tången med momentet  
 $M = F \cdot l = 20 \cdot 0,15 \text{ Nm} = 3,0 \text{ Nm}$ .  
 Detta moment vrider tången även i den andra änden där momentarmen endast är  $l_1 = 0,015 \text{ m}$ .  
 Kraften där är  $F_1$ , där

$$M = F_1 \cdot l_1 \Rightarrow F_1 = \frac{M}{l_1} = \frac{3,0}{0,015} \text{ N} = 200 \text{ N}$$

Svar: 200 N

106. Vi drar med en linjal en lodlinje, dvs. en linje rakt nedåt från tyngdpunkten. I lådorna A och C kommer denna linje att hamna till vänster om det hörn där lådorna vilar. Dessa lådor kommer därför att falla åt vänster. I låda B kommer lodlinjen att hamna till höger om detta hörn. Den lådan kommer alltså att falla åt höger.

Svar: Låda B

107. Axel sitter 2,5 m från mitten och Gustav sitter  $(2,5 - x)$  m från mitten.  
 Axels tyngd är  $m_A g = 16g$  och Gustavs tyngd är  $m_G g = 24g$   
 Axel vrider gungan moturs och Gustav vrider medurs. Vid jämvikt gäller momentlagen:  
 $16g \cdot 2,5 = 24g \cdot (2,5 - x)$   
 $40 = 60 - 24x$   
 $24x = 20$   
 $x = 0,83$

Svar: Gustav ska sätta sig 83 cm från gungans ände.

108. a) Vi låter O vara momentpunkten. De enda krafter som har moment med avseende på punkten O är:  
 1) Dynamometerkraften som är 3,5 N. Den vrider moturs och momentarmen är 0,4 m.  
 2) Stavens egen tyngd som är 0,200g. Tyngden vrider medurs och har momentarmen 0,5 m.  
 3) Stenen med massan  $m$  har tyngden  $mg$ . Denna tyngd vrider medurs och har momentarmen 1,0 m.  
 Staven är i momentjämvikt. Momentlagen ger att summan av alla moment moturs är lika med summan av alla moment medurs.

$$3,5 \cdot 0,4 = 0,200g \cdot 0,5 + mg \cdot 1,0$$

$$m = \frac{3,5 \cdot 0,4 - 0,200g \cdot 0,5}{g \cdot 1,0} =$$

$$= \frac{3,5 \cdot 0,4 - 0,200 \cdot 9,82 \cdot 0,5}{9,82 \cdot 1,0} \text{ kg} = 0,0426 \text{ kg} = 43 \text{ g}$$

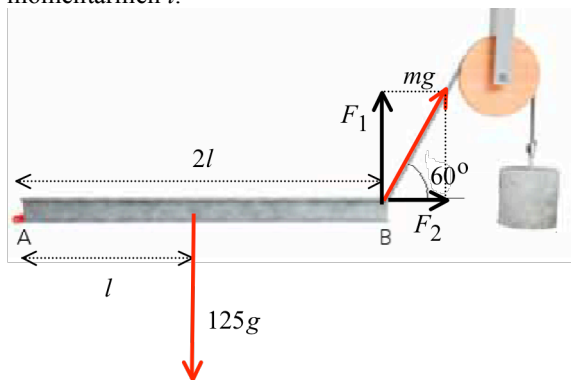
- b) Det verkar också krafter i punkten O.  
 Staven är i kraftjämvikt. Summan av alla krafter är lika med noll.  
 Uppåt verkar kraften från dynamometern 3,5 N.  
 Nedåt verkar stavens tyngd  
 $0,200 \cdot g = 0,200 \cdot 9,82 \text{ N} = 1,964 \text{ N}$  och stenens tyngd  
 $0,0426 \cdot g = 0,0426 \cdot 9,82 \text{ N} = 0,418 \text{ N}$   
 Resultanten av dessa är  
 $(3,5 - 1,964 - 0,418) \text{ N} = 1,118 \text{ N}$  riktad uppåt.  
 Kraften i O måste således vara 1,118 N (riktad nedåt.)

Svar: a) 43 g b) 1,1 N

109. Tyngdpunkten ligger 4,5 m från balkens ändar.  
Om mannen står på balken och går ut mot högra änden på balken tills han är på avståndet  $x$  från denna ände, tippas balken. Vi väljer betongblockets högra hörn som momentpunkt.  
Balkens tyngd har momentet  
 $500g \cdot 1,5 = 500 \cdot 9,82 \cdot 1,5 \text{ Nm} = 7365 \text{ Nm}$  moturs.  
Om mannen ställer sig längst ut på höger sida har hans tyngd momentet  
 $80g \cdot 3,0 = 80 \cdot 9,82 \cdot 3,0 \text{ Nm} = 2357 \text{ Nm}$  medurs.  
Moment från mannen är således mindre än momentet från balken och det är ingen risk att det välter.  
Om mannen istället går ut mot vänstra änden på balken är risken större att det välter. Vi väljer nu betongblockets vänstra hörn till momentpunkt.  
Anta att det välter då mannen befinner sig på avståndet  $x$  från balkens vänstra ände.  
Momentarmen är då  $(4,0 - x)$  och momentet är  
 $80g \cdot (4,0 - x)$  moturs.  
Balkens tyngd har momentarmen 0,5 m och momentet  
 $500g \cdot 0,5 = 250g$  medurs.  
Vi sätter dessa lika.  
 $80g \cdot (4,0 - x) = 250g$   
 $320 - 80x = 250$   
 $80x = 70 \Rightarrow x = \frac{70}{80} \text{ m} = 0,875 \text{ m}$

Svar: a) Han kan gå ända ut till högra änden utan att balken välter b) Han kan gå till 87 cm från balkens vänstra ände, men går han längre ut så välter den.

110. Låt balkens massa vara  $m$  och dess längd  $2l$ . De krafter som har moment med avseende på momentpunkten A är balkens egen tyngd  $125g$  som verkar mitt på balken och som vrider balken medurs och spännkraften i repet som är lika med viktens tyngd  $mg$ . Denna spännkraft är riktad snett uppåt höger. Vi delar upp den i en vertikal kraft  $F_1$  och en horisontell kraft  $F_2$ .  $F_2$  har inget vridande moment på balken.  $F_1$  vrider moturs och har momentarmen  $2l$ , medan tyngdkraften  $125g$  har momentarmen  $l$ .



$$F_1 = mg \cdot \sin 60^\circ$$

$$F_2 = mg \cdot \cos 60^\circ$$

Balken är i vila. Momentlagen ger

$$125g \cdot l = mg \cdot \sin 60^\circ \cdot 2l$$

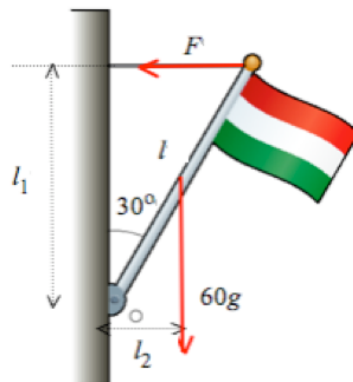
$$m = \frac{125}{\sin 60^\circ \cdot 2} \text{ kg} = 72 \text{ kg}$$

Svar: 72 kg

111. a) Vi väljer punkten O som momentpunkt. De krafter som vrider flaggstången är dels dess egen tyngd  $60g$ , dels också kraften  $F$  från linan. Båda dessa är utritade i figuren nedan.  
Låt flaggstångens längd vara  $l$ .  
Flaggstångens tyngdpunkt befinner sig mitt på stången, dvs. på avståndet  $l/2$  från O.  
 $F$  vrider moturs. Momentarmen är betecknad  $l_1$ .  
Tyngden vrider medurs. Momentarmen är  $l_2$ .  
Trigonometri ger att

$$l_1 = l \cdot \cos 30^\circ$$

$$l_2 = \frac{l}{2} \cdot \sin 30^\circ$$



Momentlagen ger

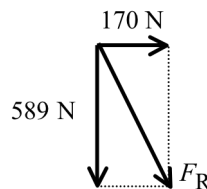
$$F \cdot l_1 = 60g \cdot l_2$$

$$F \cdot l \cdot \cos 30^\circ = 60g \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin 30^\circ$$

$$F = 60g \cdot \frac{\sin 30^\circ}{2 \cdot \cos 30^\circ} = 30 \cdot 9,82 \cdot \tan 30^\circ \text{ N} = 170 \text{ N}$$

- b) Resultanten till två krafterna

$$F = 170 \text{ N och } 60g = 60 \cdot 9,82 \text{ N} = 589 \text{ N är } F_R.$$



$F_R$  bestäms med Pythagoras sats.

$$F_R = \sqrt{589^2 + 170^2} \text{ N} = 613 \text{ N}$$

Eftersom det råder kraftjämvikt måste det verka en lika stor med motriktad kraft på flaggstången i punkten O.

c) Det är Ungerns flagga.

Svar: a) 170 N b) 610 N c) Ungern

112. a) Sekundvisaren går ett varv på tiden 60 s.

$$\text{Vinkelhastigheten är } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s} = 0,10 \text{ rad/s}.$$

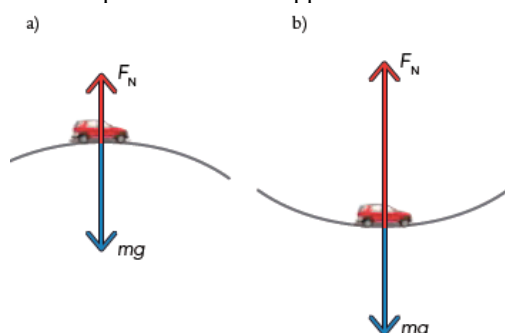
$$\text{b) Accelerationen } a = \omega^2 \cdot r = 0,10^2 \cdot 0,02 \text{ m/s}^2 = 0,22 \text{ mm/s}^2$$

Svar: a) 0,10 rad/s b) 0,22 mm/s<sup>2</sup>

113. På bilen verkar två krafter i vertikal led, bilens tyngd  $mg$  och normalkraften  $F_N$ .

I a) är  $mg > F_N$ . Den resulterande kraften  $mg - F_N$  är riktad nedåt.  $mg - F_N$  är en centripetalkraft.

I b) är  $mg < F_N$ . Den resulterande kraften  $F_N - mg$  är nu en centripetalkraft riktad uppåt.



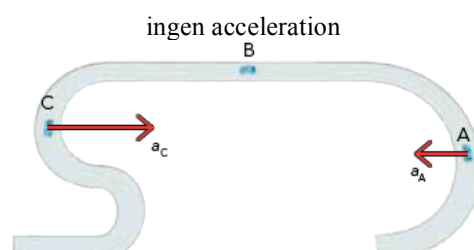
114. I punkt A svänger bilen i en cirkulär sväng.

Accelerationen är riktad in mot centrum.

Samma gäller i punkt C. Där är kurvradien bara hälften så stor. Accelerationen blir då dubbelt så stor enligt

$$a = \frac{v^2}{r}. \text{ I punkt B kör bilen rakt fram med konstant fart.}$$

Där accelererar den alltså inte.



115. En kub börjar glida när friktionskraften inte är tillräckligt stor för att hålla en kuben i en cirkelbana.

$$\text{Maximal friktionskraft är } F_f = \mu \cdot F_N = \mu \cdot mg.$$

$$\text{Nödvändig centripetalkraft är } F_c = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}.$$

Friktionskraften är centripetalkraft.

$$\mu \cdot mg = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \Rightarrow \mu \cdot g = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Vi ser att massan är oväsentlig. En tung kub och en lätt kub glider samtidigt om deras avstånd till centrum är lika stora. A och C glider samtidigt.

Vi ser också av formeln att om avståndet  $r$  är mycket stort, kommer inte friktionskraften att räcka till. Det innebär att A och C glider iväg före B.

Svar: Först glider A och C (samtidigt), sist glider B

116. a) En kraft som är riktad in mot ett centrum.

b) Ja, den resulterande kraften på en satellit som kretsar kring jorden är tyngdkraften. Den är centripetalkraft.

$$117. \frac{v^2}{r} \text{ har enheten } \frac{\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\text{m}} = \frac{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\text{m}} = \frac{\text{m}^2}{\text{m} \cdot \text{s}^2} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ vilket är enheten för acceleration.}$$

118. a) 1600 varv/minut innebär  $\frac{1600}{60} = 26,7$  varv/s.

Vinkelhastigheten är

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 26,7 \text{ rad/s} = 168 \text{ rad/s}.$$

$$\text{b) Trummans radie är } \frac{0,30}{2} \text{ m} = 0,15 \text{ m}.$$

Accelerationen

$$a_c = \omega^2 \cdot r = 168^2 \cdot 0,15 \text{ m/s}^2 = 4211 \text{ m/s}^2$$

Svar: a) 170 rad/s b) 4200 m/s<sup>2</sup>

119. Medelhastigheten  $v = \frac{500}{34,03} \text{ m/s} = 14,7 \text{ m/s}.$

Den resulterande kraften i kurvan är

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = \frac{75 \cdot 14,7^2}{25} \text{ N} = 648 \text{ N}$$

Svar: 650 N

120. Kraften på elektronen bestäms med Coulombs lag.

$$F = k \cdot \frac{q \cdot q}{r^2}$$

Elektronens och vätekärnans (protonens) laddning är  $q$ .

Elektronens massa  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg.

Denna kraft är en centripetalkraft. Vi kan därför skriva

$$k \cdot \frac{q \cdot q}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$v^2 = k \cdot \frac{q^2}{m \cdot r} \Rightarrow v = \sqrt{k \cdot \frac{q^2}{m \cdot r}} = \sqrt{9,0 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,3 \cdot 10^{-11}}} \text{ m/s} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Svar: 2,2 Mm/s

121. Omloppstiden  $T = \frac{10}{8} \text{ s} = 1,25 \text{ s}$

Centripetalkraften på stenen är

$$F_c = \frac{4\pi^2 \cdot r \cdot m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1,5 \cdot 0,250}{1,25^2} \text{ N} = 9,47 \text{ N}$$

a) Då spannen och stenen är i sitt övre läge, verkar två krafter på stenen, dels dess tyngd  $mg$  och dels normalkraften  $F_{N1}$ . Båda dessa är riktade nedåt och utgör tillsammans centripetalkraften.

$$F_{N1} + mg = 9,47$$

$$F_{N1} = 9,47 - mg = (9,47 - 0,250 \cdot 9,82) \text{ N} = 7,0 \text{ N}$$

b) Då spannen och stenen är i sitt nedre läge är normalkraften  $F_{N2}$  riktad uppåt och tyngden nedåt.

Resultande kraft är

$$F_{N2} - mg = 9,47$$

$$F_{N2} = mg + 9,47 = (0,250 \cdot 9,82 + 9,47) \text{ N} = 11,9 \text{ N}$$

Svar: a) 7 N b) 12 N

122. a) Om bilen ska klara loopens måste den resulterande

kraften vara en centripetalkraft  $\frac{mv^2}{r}$ .

På bilen verkar två krafter, dess tyngd  $mg$  och en normalkraft  $F_N$ . Båda dessa krafter verkar nedåt.

$$F_N + mg = \frac{mv^2}{r}$$

$$F_N = \frac{mv^2}{r} - mg =$$

$$= \left( \frac{0,200 \cdot 3,0^2}{0,30} - 0,200 \cdot 9,82 \right) \text{ N} = 4,0 \text{ N}$$

Att normalkraften är 4,0 N visar att bilen är i kontakt med banan och alltså klarar loopens.

- b) Normalkraften är 4,0 N och tyngden är

$$mg = 0,200 \cdot 9,82 \text{ N} = 2,0 \text{ N}$$

Detta är de enda två krafter som verkar på bilen i loopens högsta punkt.

Svar: b) Normalkraften 4,0 N och tyngden 2,0 N

123. Jordens massa är  $M = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg och månens massa

$$\text{är } m = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

Medelavståndet mellan jorden och månen är

$$r = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Gravitationskraften mellan jorden och månen är

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} =$$

$$= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(3,84 \cdot 10^8)^2} \text{ N} = 2,0 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

Svar:  $2,0 \cdot 10^{20} \text{ N}$

124. Keplers tredje lag ger att

$$\frac{T^2}{r^3} \text{ är konstant för alla planeter i vårt solsystem.}$$

Vi jämför då omloppstiden och avståndet till solen för Uranus och jorden.

$$\frac{T_U^2}{r_U^3} = \frac{T_J^2}{r_J^3}$$

$$T_U^2 = \frac{T_J^2 \cdot r_U^3}{r_J^3} = \frac{T_J^2 \cdot (19 \cdot r_J)^3}{r_J^3} = T_J^2 \cdot 19^3$$

$$T_U = T_J \cdot \sqrt{19^3} = T_J \cdot 83$$

I år på Uranus motsvarar alltså 83 år på jorden.

Svar: 83

125. a) ISS befinner sig på avståndet

$$r = (3,85 \cdot 10^5 + 6,36 \cdot 10^6) \text{ m} = 6,745 \cdot 10^6 \text{ m från jordens centrum.}$$

Omloppstiden är  $T = 92 \text{ minuter} = 92 \cdot 60 \text{ s} = 5520 \text{ s}$

Låt  $m$  vara rymdstationens massa och  $M$  jordens massa.

Gravitationskraften är centripetalkraft och vi får

$$G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{4\pi^2 m \cdot r}{T^2}$$

Vi löser ut  $G$ .

$$G = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{T^2 \cdot M} = \frac{4\pi^2 \cdot (6,745 \cdot 10^6)^3}{5520^2 \cdot 6,0 \cdot 10^{24}} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 =$$

$$= 6,63 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

b) Gravitationskraften (tyngdkraften) på astronauten är

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = 6,6 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{80 \cdot 6,0 \cdot 10^{24}}{(6,745 \cdot 10^6)^2} \text{ N} = 700 \text{ N}$$

Astronauten och rymdstationen faller lika snabbt mot jorden.

Svar: a)  $6,6 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  b) 700 N c) Astronauten och rymdstationen faller lika snabbt mot jorden.

126. Låt Ganymedes massa vara  $M_G$  och Jupiters massa  $M_J$ . Gravitationskraften på Ganymedes är centripetalkraft. Vi kan sätta dessa båda lika.

$$G \cdot \frac{M_J \cdot M_G}{r^2} = \frac{4\pi^2 M_G \cdot r}{T^2}$$

Vi löser ut Jupiters massa och får

$$M_J = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (1,07 \cdot 10^9)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (6,18 \cdot 10^5)^2} \text{ kg} = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

Svar:  $1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

127. Vi utnyttjar sambandet att  $\frac{T^2}{r^3}$  är konstant, där  $T$  är omloppstiden och  $r$  avståndet. Detta gäller lika väl för månar kring jorden som för planeter runt solen. Vi betecknar månens omloppstid resp. avstånd med index m och den nya månens med index n.

$$\text{Vi får då: } \frac{T_n^2}{r_n^3} = \frac{T_m^2}{r_m^3}$$

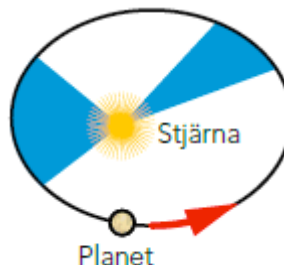
Vi löser ut  $r_n$ . Vi räknar avstånden i km och tiderna i dygn.

$$r_n^3 = \frac{T_n^2 \cdot r_m^3}{T_m^2}$$

$$r_n = \left( \frac{T_n^2 \cdot r_m^3}{T_m^2} \right)^{1/3} = \left( \frac{1^2 \cdot (3,84 \cdot 10^5)^3}{27,3^2} \right)^{1/3} \text{ km} = 4,2 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Svar:  $4,2 \cdot 10^4 \text{ km}$

128. a) Planeten rör sig i en ellips med stjärnan som sin ena brännpunkt. Planeten rör sig i denna bana med sådan hastighet att en rät linje från planeten till stjärnan översveper lika stora areor på lika långa tider. De markerade areorna i figuren är lika stora och det tar lika lång tid för planeten att röra sig utefter ett sådant område.



- b) Vi beräknar planetens medelavstånd till stjärnan.

$$r = \frac{1,8 + 2,3}{2} \text{ AU} = 2,05 \text{ AU} =$$

$$= 2,05 \cdot 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m} = 3,07 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Låt  $m$  vara satellitens massa och  $M$  stjärnans massa. Gravitationskraften mellan planeten och stjärnan är centripetalkraft.

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$M = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{(24,7 \cdot 10^3)^2 \cdot 3,07 \cdot 10^{11}}{6,67 \cdot 10^{-11}} \text{ kg} = 2,8 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

- c) Solens massa är ca  $2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .

Stjärnans massa är ca  $\frac{2,8 \cdot 10^{30}}{2,0 \cdot 10^{30}} = 1,4$  gånger större än solens.

Svar: b)  $2,8 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  c) 1,4

129. En förklaring är att den resulterande kraften på satelliten är gravitationskraften, som är centripetalkraft.  $m$  är satellitens massa och  $M$  är jordens massa.

$$G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Detta kan förenklas till

$$v^2 = G \cdot \frac{M}{r}$$

Av detta uttryck framgår att om avståndet  $r$  minskar så kommer hastigheten  $v$  att öka.

130. a)  $v_{ox} = v_o \cdot \cos \alpha = 4,0 \cdot \cos 30^\circ = 3,5 \text{ m/s}$

$$b) v_{oy} = v_o \cdot \sin \alpha = 4,0 \cdot \sin 30^\circ = 2,0 \text{ m/s}$$

Svar: a) 3,5 m/s b) 2,0 m/s

131. Stenen faller fritt 80 m. Falltiden bestäms med

$$\text{formeln } y = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{9,82}} \text{ s} = 4,04 \text{ s}$$

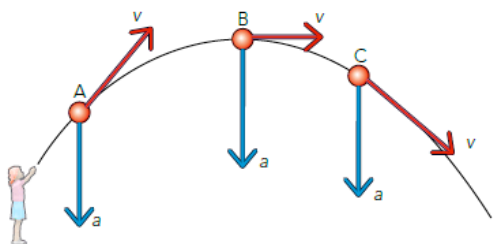
Hastigheten i horisontell led är konstant.

Dess hastighet i x-led är

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{30}{4,04} \text{ m/s} = 7,4 \text{ m/s}$$

Svar: 7,4 m/s

132. Accelerationen är riktad rakt nedåt.
- $a = g$
- .
- 
- Hastigheten
- $v$
- är i varje punkt riktad som en tangent till kastbanan.



- 133. Hastigheten i horisontell led är konstant.

$$v_x = v_o \cdot \cos \alpha = 8,0 \cdot \cos 30^\circ \text{ m/s} = 6,9 \text{ m/s}$$

Tiden att nå garageporten är

$$t = \frac{x}{v_x} = \frac{3,5}{6,9} \text{ s} = 0,51 \text{ s}$$

Svar: 0,51 s

134. a) Läget i vertikal led är

$$y = v_o \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Efter 1,5 s är bollen på höjden

$$y = 12 \cdot \sin 45^\circ \cdot 1,5 - \frac{9,82 \cdot 1,5^2}{2} \text{ m} = 1,7 \text{ m}$$

- b) Hastigheten i vertikal led är

$$v_y = v_o \cdot \sin 45^\circ - gt = 12 \cdot \sin 45^\circ - 9,82 \cdot 1,5 \text{ m/s} = -6,2 \text{ m/s}$$

Hastigheten i horisontell led är

$$v_x = v_o \cdot \cos 45^\circ = 12 \cdot \cos 45^\circ \text{ m/s} = 8,5 \text{ m/s}$$

Den resulterande hastigheten är  $v$ , som bestäms med Pythagoras sats.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{8,5^2 + 6,2^2} \text{ m/s} = 10,5 \text{ m/s}$$

$$\text{Riktningen ges av } \tan \alpha = \frac{6,2}{8,5} \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

Svar: a) 1,7 m över den punkt där den kastadesb) Hastigheten är 10,5 m/s i en riktning 36° snett nedåt.

135. a) På 1,0 s faller kulan (fritt fall) sträckan

$$s = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \cdot 1,0^2}{2} \text{ m} = 5,0 \text{ m}$$

Denna sträcka motsvarar en ruta i figuren.

På 1,0 s har kulan rört sig 3 rutor i x-led.

3 rutor motsvarar  $3 \cdot 5,0 \text{ m} = 15 \text{ m}$ .

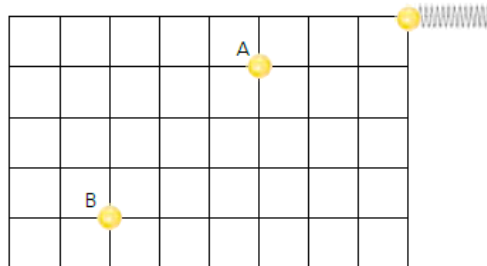
Hastigheten i x-led, dvs. kulans utgångshastighet var tydligen 15 m/s.

b) Efter 2,0 s har kulan flyttat sig ytterligare 3 rutor i x-led. I y-led har kulan flyttat sig sträckan

$$s = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \cdot 2,0^2}{2} \text{ m} = 20 \text{ m}$$

vilket motsvarar en förflyttning 4 rutor.

Figuren visar kulans läge efter 2,0 s.

Svar: a) 15 m/s

136. Hastigheten i horisontell led är konstant.

$$v_x = v_o \cdot \cos \alpha = 22 \cdot \cos 20^\circ \text{ m/s} = 20,67 \text{ m/s}$$

Tiden tills bollen är framme vid målet är

$$t = \frac{11,0}{20,67} \text{ s} = 0,532 \text{ s}$$

Vi beräknar nu var i höjdlid bollen befinner sig efter denna tid

$$y = v_o \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Efter 0,577 s är bollen på höjden

$$y = 22 \cdot \sin 20^\circ \cdot 0,532 - \frac{9,82 \cdot 0,532^2}{2} \text{ m} = 2,6 \text{ m}$$

Bollen kommer att gå över målet.

Svar: Nej. Bollen går över målet.



137. a) Vi beräknar tiden för kastet.

Släggan kastas från origo och när den når marken är  $y = -0,8 \text{ m}$

Utgångshastigheten i  $y$ -led är  $v_{oy} = v_o \cdot \sin \alpha$ .

Läget i  $y$ -led beskrivs av uttrycket

$$y = v_o \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Vi beräknar tiden då släggan når marken.

Vi sätter in kända värden och får

$$-0,8 = 25 \cdot \sin 32^\circ \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Detta är en andragradsekvation.

Vi sätter in  $g = 9,82 \text{ m/s}^2$  och skriver ekvationen på normalform.

$$t^2 - 2,70 \cdot t - 0,163 = 0$$

Lösningarna är  $t_1 = 2,76 \text{ s}$  och  $t_2 = -0,059 \text{ s}$ , där

naturligtvis endast  $t = 2,76 \text{ s}$  är fysikaliskt rimligt.

Läget i  $x$ -led beskrivs av uttrycket

$$x = v_o \cdot \cos \alpha \cdot t$$

Insättning av tiden  $t = 2,76 \text{ s}$  ger

$$x = 25 \cdot \cos 32^\circ \cdot 2,76 \text{ m} = 58 \text{ m}$$

b) Stighöjden, dvs. högsta höjden över utgångsläget är

$$y_{\text{max}} = \frac{v_o^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{25^2 \cdot \sin^2 32^\circ}{2 \cdot 9,82} \text{ m} = 8,9 \text{ m}$$

Högsta höjden över marken är  $(8,9 + 0,8) \text{ m} = 9,7 \text{ m}$

Svar: a) 58 m b) 9,7 m

138. a) Vi kan inte bortse från luftmotståndet. Luftmotståndet är alltid motriktad hastigheten. Den är större ju större hastighet bollen har. Eftersom bollen släppts från mycket hög höjd, kan vi räkna med att bollen når en gränshastighet. Då är luftmotståndet uppåt lika stor som tyngden nedåt, dvs. båda är  $mg$ , men motriktade. Accelerationen är då noll.

b) Eftersom studsens är fullständigt elastisk kommer bollen att få samma fart efter studsens som den hade strax före studsens. Luftmotståndet är därför lika stort strax före studsens som strax efter studsens.

Före studsens är luftmotståndet  $mg$  riktat uppåt och efter studsens är luftmotståndet  $mg$  riktat nedåt.

Omedelbart efter studsens verkar alltså två krafter på bollen, luftmotståndet  $mg$  och tyngden  $mg$ , båda riktade nedåt. Den totala kraften är  $2mg$  och accelerationen är  $2g$ .

Svar: a)  $0 \text{ m/s}^2$  b)  $2g$

139. a) Tunnans tyngd är
- $mg = 200 \cdot 9,82 \text{ N} = 1964 \text{ N}$

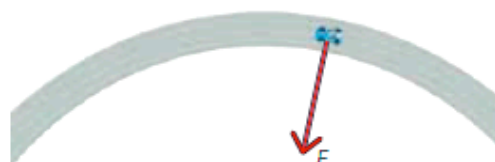
Momentarmen är  $5,0 \text{ m}$  och momenten är då

$$M = F \cdot l = 1964 \cdot 5,0 \text{ Nm} = 9820 \text{ Nm}$$

b) Vi låter markfästet vara momentpunkt. Även i detta fall är momentarmen  $5,0 \text{ m}$  och kraftmomentet samma som tidigare  $9820 \text{ Nm}$ .

Svar: a)  $9,8 \text{ kNm}$  b)  $9,8 \text{ kNm}$

140. Den resulterande kraften är en centripetalkraft, dvs. riktad in mot cirkelns centrum.



141. Vinkelhastigheten
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2,0} \text{ rad/s} = 3,1 \text{ rad/s}$

Svar:  $3,1 \text{ rad/s}$

- 142.
- $7,2 \text{ km/h} = \frac{7,2}{3,6} \text{ m/s} = 2,0 \text{ m/s}$

Bil med barn väger  $m = (205 + 20) \text{ kg} = 225 \text{ kg}$

För att klara svängen krävs en resulterande kraft av

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = \frac{225 \cdot 2,0^2}{2,0} \text{ N} = 450 \text{ N}$$

Svar:  $450 \text{ N}$

143. Stenens massa är
- $m$
- . Spettet påverkas av kraften
- $600 \text{ N}$
- och av stenens tyngd
- $mg$
- .

Så länge spettet är i vila är enligt momentlagen momenten från dessa krafter lika stora.

$600 \text{ N}$ -kraften har momentarmen  $1,8 \text{ m}$  och stenens tyngd har momentarmen  $0,2 \text{ m}$ .

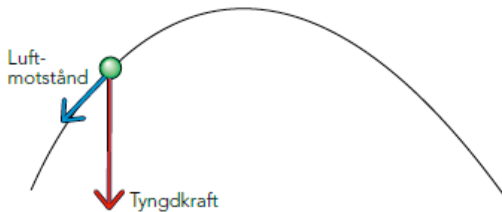
Momentet moturs är  $600 \cdot 1,8 \text{ Nm}$  och momentet medurs är  $mg \cdot 0,2$ .

Momentlagen ger att  $600 \cdot 1,8 = mg \cdot 0,2 \Rightarrow$

$$m = \frac{600 \cdot 1,8}{g \cdot 0,2} = \frac{600 \cdot 1,8}{9,82 \cdot 0,2} \text{ kg} = 550 \text{ kg}$$

Svar:  $550 \text{ kg}$

144. Bollen rör sig snett uppåt höger.  
På bollen verkar två krafter, tyngdkraften och luftmotståndet. Tyngdkraften verkar rakt nedåt. Luftmotståndet verkar åt motsatt riktning som rörelseriktningen



145. Vinkelhastigheten  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  beror bara på omloppstiden som är konstant.

Accelerationens storlek är  $a_c = \omega^2 \cdot r$  är konstant

eftersom både  $\omega$  och  $r$  är konstanta.

Accelerationens riktning är inte konstant. Den är hela tiden riktad in mot karusellens centrum.

Det finns en resulterande kraft på barnet. Den är riktad mot centrum. Påståendena a och b är alltså korrekta.

Svar: a och b

146. a)  $v = 90 \text{ km/h} = \frac{90}{3,6} \text{ m/s} = 25 \text{ m/s}$

Centripetalaccelerationen

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{25^2}{80} \text{ m/s}^2 = 7,8 \text{ m/s}^2$$

b) På bilen verkar två krafter, tyngden  $mg$  nedåt och normalkraften  $F_N$  uppåt. Normalkraften är mindre än tyngden eftersom den resulterande kraften är en centripetalkraft  $F_c$  riktad nedåt.

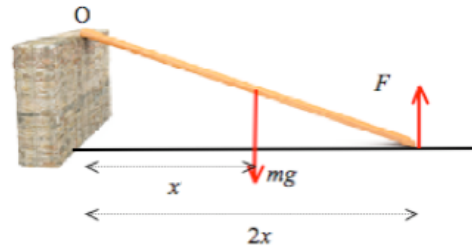
$$F_c = \frac{mv^2}{r} = mg - F_N$$

$$F_N = mg - \frac{mv^2}{r} =$$

$$= (1500 \cdot 9,82 - \frac{1500 \cdot 25^2}{80}) \text{ N} = 3011 \text{ N}$$

Svar: a)  $7,8 \text{ m/s}^2$  b)  $3,0 \text{ kN}$

147. Den lyftande kraften är  $F$ . Tyngden  $mg$  verkar mitt på brädan och har momentarmen  $x$  (se figur).  $F$  har momentarmen  $2x$ .



Om man ska kunna lyfta brädan från marken, så måste den lyftande kraftens moment vara (minst) lika stor som tyngdens moment.

Momentlagen:  $F \cdot 2x = mg \cdot x$

$$F = \frac{mg}{2} = \frac{20 \cdot 9,82}{2} \text{ N} = 98 \text{ N}$$

Svar: 98 N

148. Att falla 10 m i ett fritt fall tar tiden  $t$ , där

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9,82}} \text{ s} = 1,43 \text{ s}$$

Kalles hastighet i horisontellt led är konstant  $4,0 \text{ m/s}$  och under fallet rör han sig sträckan  $x = 4,0 \cdot 1,43 \text{ m} = 5,7 \text{ m}$

Svar: 5,7 m

149. Tiden det tar för bollen att nå marken är lika stor som tidigare eftersom höjden är densamma. Tiden påverkas inte av vilken hastighet bollen har i horisontell led. I horisontell led är hastigheten vid vardera slaget konstant.

Om bollen kommer 20 m vid ett viss slag så kommer bollen dubbelt så långt, dvs. 40 m om man slår med dubbelt så stor hastighet.

Svar: 40 m

150. Jorden går ett varv runt solen på 1 år.

$$1 \text{ år} = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 31536000 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{31536000} \text{ rad/s} = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$$

Svar:  $2,0 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$



151. Efter 2,0 s har stenen hastighet  $v_y$ .

$$v_y = gt = 9,82 \cdot 2,0 \text{ m/s} = 19,64 \text{ m/s}$$

I  $x$ -led är hastigheten konstant 8,0 m/s.

Hastigheten  $v$  efter 2,0 s bestäms med Pythagoras sats.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{8,0^2 + 19,64^2} \text{ m/s} = 21 \text{ m/s}$$

Svar: 21 m/s

152. a) Vi lyfter plankan i vänstra änden med kraften  $F$ .  
Momentet är då medurs.  
Momentpunkten väljer vi då till bordets högra ände.  
Momentarmen är då 3,0 m.  
Plankans tyngd är  $16g$ . Tyngdpunkten ligger 1,0 m från bordets högra ände. Tyngden vrider plankan moturs.  
Momentlagen:  $F \cdot 3,0 = 16g \cdot 1,0$

$$F = \frac{16g \cdot 1,0}{3,0} = \frac{16 \cdot 9,82 \cdot 1,0}{3,0} \text{ N} = 52,4 \text{ N}$$

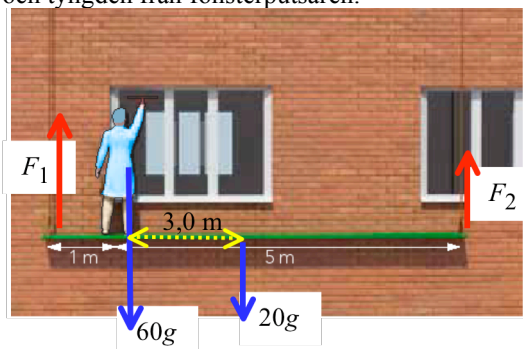
- b) Vi trycker ned plankan i vänstra änden med kraften  $F$ .  
Momentet är då moturs.  
Momentpunkten väljer vi nu till bordets vänstra ände.  
Momentarmen är 1,0 m.  
Plankans tyngd är  $16g$ . Tyngdpunkten ligger 1,0 m från bordets vänstra ände. Tyngden vrider plankan moturs.  
Momentlagen:  $F \cdot 1,0 = 16g \cdot 1,0$

$$F = 16g = 16 \cdot 9,82 \text{ N} = 157 \text{ N}$$

Svar. a) 52 N b) 160 N

153. Krafterna repen är  $F_1$  resp.  $F_2$  (se figur).

Förutom dessa två krafter verkar på bräden dess tyngd och tyngden från fönsterputsaren.



Vi låter momentpunkten O vara den punkt där kraften  $F_1$  verkar. Denna kraft har då inget moment med avseende på O.  $F_2$  har ett moment moturs med momentarmen 6,0 m, tyngden  $20g$  har ett moment medurs med momentarmen 3,0 m och tyngden  $60g$  har också ett moment medurs med momentarmen 1,0 m.

Brädan är i jämvikt.

Momentlagen ger

$$F_2 \cdot 6,0 = 20g \cdot 3,0 + 60g \cdot 1,0$$

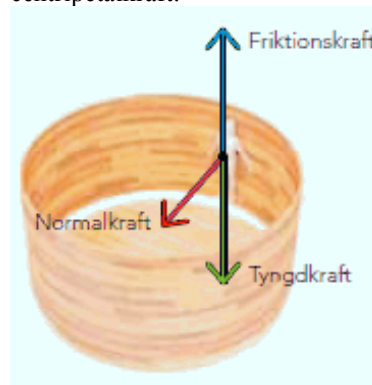
$$F_2 \cdot 6,0 = \frac{120g}{6,0} = 20g = 20 \cdot 9,82 \text{ N} = 196 \text{ N}$$

$$\text{Kraftjämvikt råder. } F_1 + F_2 = 20g + 60g = 80g$$

$$F_1 = 80g - F_2 = (80 \cdot 9,82 - 196) \text{ N} = 589 \text{ N}$$

Svar: Kraften i det vänstra repet är 590 N och i det högra 200 N

154. Friktionskraften och tyngdkraften är lika stora men motriktade. Normalkraften från väggen är en centripetalkraft.



155. Radien  $r$  i banan är 5 m.  
För att bilen ska kunna klara loopen måste den ha kontakt med vägbanan hela tiden. Mest kritiska ögonblicket är när den är i sin övre punkt. Nödvändig

centripetalkraft är  $F_c = \frac{mv^2}{r}$ . Tillgänglig kraft i detta ögonblick är bilens tyngd  $mg$  och normalkraften  $F_N$  från

vägbanan. Vi sätter  $\frac{mv^2}{r} = mg + F_N$ .

Bilen tappas kontakten med vägbanan om  $F_N = 0$ .

Vi får då den nedre gränsen för bilens hastighet.

$$\frac{mv^2}{r} = mg \Rightarrow v = \sqrt{gr} = \sqrt{9,82 \cdot 5} \text{ m/s} = 7,0 \text{ m/s} = 7,0 \cdot 3,6 \text{ km/h} = 25 \text{ km/h}$$

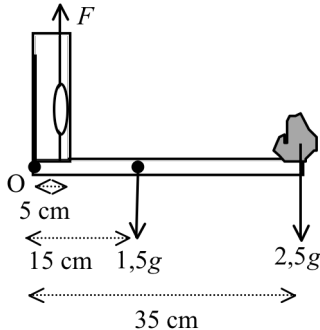
Svar: 25 km/h

156. Tyngdaccelerationen är  $1,62 \text{ m/s}^2$ . Vi kallar den " $g$ ".  
Helst bör vi göra en härledning av kastvidden med hjälp av rörelselagarna. Detta är gjort i läroboken och vi utnyttjar därför direkt formeln för kastvidd.

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{20^2 \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ)}{1,62} \text{ m} = 247 \text{ m}$$

Svar: 250 m

157. Låt momentpunkten O vara armbågsleden. Bicepsmuskeln drar moturs med kraften  $F$ . Momentarmen är 5 cm. Underarmens tyngd 1,5g och stenens tyngd 2,5g drar båda moturs med respektive momentarmarna 15 cm och 35 cm.



Momentjämvikt råder. Momentlagen ger (vi anger momentarmarna i centimeter)

$$F \cdot 5 = 1,5g \cdot 15 + 2,5g \cdot 35 = 110 \cdot 9,82$$

$$F = \frac{110 \cdot 9,82}{5} \text{ N} = 216 \text{ N}$$

Svar: 200 N

158. Vikterna B och E kommer att vrida skivan medurs, medan vikterna D och E vrider moturs. Vikten A har inget moment eftersom dess momentarm är noll. Eftersom vi bara ska jämföra momenten medurs-moturs kan vi räkna i vilka enheter vi vill. Vi låter helt enkelt vikterna massor i gram representera tyngdkrafterna och antalet rutor till vänster resp. till höger om mittlinjen representera momentarmarna.
- B:s moment:  $30 \cdot 2$  (rutor) = 60  
 E:s moment:  $80 \cdot 4$  (rutor) = 320  
 Summa moment medurs:  $60 + 320 = 380$   
 C:s moment:  $50 \cdot 5$  (rutor) = 250  
 D:s moment:  $150 \cdot 1$  (rutor) = 150  
 Summa moment moturs:  $250 + 150 = 400$   
 Momenten moturs är alltså större än momenten medurs. Skivan kommer att vridas moturs.

Svar: Skivan kommer att rotera moturs.

159. Man hänger upp det man vill väga i kroken i ena änden av stängen. Vikten i den andra änden har en känd massa. Man håller i handtaget och skjuter detta utefter stängen tills man kan hålla stängen horisontellt i vila. Då vet man att viktens moment med avseende på handtaget är lika stort som momentet från det man väger. Dess massa bestäms då av avstånden från handtaget till det vägda och till den tunga vikten. Stängen är graderad i kilogram och från handtagsläge kan man direkt avläsa massan hos det vägda.

160. Jordens ekvatorsradie  $r = 6378 \text{ km}$ .

$$24 \text{ h} = 24 \cdot 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$$

Vinkelhastigheten

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400} \text{ rad/s} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Centripetalaccelerationen

$$a_c = \omega^2 \cdot r = (7,3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6378 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2 = 0,034 \text{ m/s}^2$$

Svar:  $0,034 \text{ m/s}^2$

161. I vertikal led faller han 3,0 m. För fritt fall utan begynnelsehastighet gäller

$$y = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,0}{9,82}} \text{ s} = 0,78 \text{ s}$$

På denna tid måste han komma över ravinen.

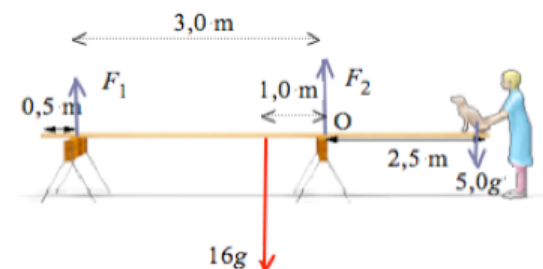
Vi antar att han har konstant hastighet 9,0 m/s i horisontell led. På tiden 0,78 s hinner han då sträckan  $9,0 \cdot 0,78 \text{ m} = 7,0 \text{ m}$ .

Han klarar sig över.

Svar: Ja

162. På plankan verkar fyra krafter, dess egen tyngd 16g, hundens tyngd 5,0g och de båda normalkrafterna  $F_1$  och  $F_2$  från bockarna. Om  $F_1$  har ett positivt värde innebär det att plankan har kontakt med den vänstra bocken, dvs. plankan välter inte. Vi väljer momentpunkten O till den punkt där den högra bocken står. Kraften  $F_2$  har då inget moment där.

Momentarmarna är markerade i figuren.



$F_1$  och 5,0g vrider medurs, 16g vrider moturs.

Om momentjämvikt råder gäller momentlagen:

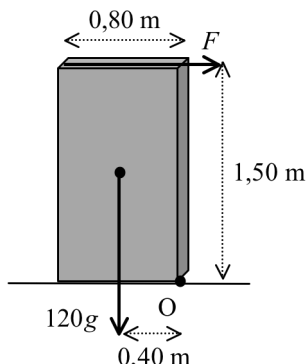
$$F_1 \cdot 3,0 + 5,0 \cdot g \cdot 2,5 = 16g \cdot 1,0$$

$$F_1 \cdot 3,0 = 3,5g \Rightarrow F_1 = \frac{3,5 \cdot 9,82}{3,0} \text{ N} = 11 \text{ N}$$

Att  $F_1 > 0$  innebär att plankan har kontakt med den vänstra bocken. Plankan välter inte.

Svar: Plankan välter inte.

163. Lådan välts kring sitt nedre högra hörn. Det är momentpunkten.  
Oskar trycker med kraften  $F$  i övre högra hörnet. Denna kraft har momentarmen 1,50 m och vrider medurs.  
Lådans egen tyngd  $120g$  verkar i tyngdpunkten som ligger mitt i lådan. Den vrider moturs och dess momentarm är 0,40 m.



Då lådans nedre vänstra hörn börjar lyfta från golvet gäller momentlagen:

$$F \cdot 1,50 = 120g \cdot 0,40$$

$$F = \frac{120 \cdot 9,82 \cdot 0,40}{1,5} \text{ N} = 314 \text{ N}$$

Svar: 310 N

164. Momentpunkten O väljs till den punkt där brädan vilar mot bryggans kant, 2,0 m från den yttre änden. Anta att John kan gå  $x$  m ut på brädan innan den tippar. De krafter som har moment med avseende på O är, John tyngd  $80g$  som har momentarmen  $x$ , Filips tyngd  $25g$  som har momentarmen 4,0 m och brädans egen tyngd  $50g$  som har momentarmen 1,0 m. Brädans och Filips moment vrider moturs och Johns moment vrider medurs.  
När brädan tippar över gäller momentlagen:  
 $25g \cdot 4,0 + 50g \cdot 1,0 = 80g \cdot x$

$$80x = 150 \Rightarrow x = \frac{150}{80} \text{ m} = 1,875 \text{ m}$$

Svar: Om han går 1,9 m ut så välter brädan.

165.  $x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$  (1)

$$y = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

Vi löser ut tiden  $t$  från ekv. (1) och sätter in detta värde i

$$\text{ekv. (2). } t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$$

$$y = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} - \frac{g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}\right)^2}{2}$$

$$y = \frac{\sin \alpha \cdot x}{\cos \alpha} - \frac{g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}}{2}$$

$$y = x \cdot \tan \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

Vi ser från detta uttryck att  $y$  som funktion av  $x$

är av formen  $y = ax - bx^2$ , dvs. en andragsgradsfunktion vars graf beskrivs av en parabel.

166. a) I vertikal led är det fråga om ett fritt fall utan begynnelsehastighet. Kulan faller 100 m. För fritt fall utan begynnelsehastighet gäller

$$y = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{9,82}} \text{ s} = 4,5 \text{ s}$$

På denna tid hinner kulan röra sig sträckan

$$x = 500 \cdot 4,5 \text{ m} = 2256 \text{ m}$$

b) Vi beräknar först tiden som kulan är i luften.

Kulan skjuts ut från origo och när den når marken är  $y = -100 \text{ m}$ .

Utgångshastigheten i  $y$ -led är  $v_{oy} = v_0 \cdot \sin \alpha$ .

Läget i  $y$ -led beskrivs av uttrycket

$$y = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

$t$  är tiden då kulan når marken.

Vi sätter in kända värden och får

$$-100 = 500 \cdot \sin 45^\circ \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Detta är en andragsgradsekvation.

Vi sätter in  $g = 9,82 \text{ m/s}^2$  och skriver ekvationen på normalform.

$$t^2 - 72 \cdot t - 20,4 = 0$$

Lösningarna är  $t_1 = 72,3 \text{ s}$  och  $t_2 = -0,28 \text{ s}$ , där

naturligtvis endast  $t = 72,3 \text{ s}$  är det enda fysikaliskt rimliga värdet.

Läget i  $x$ -led beskrivs av uttrycket

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

Insättning av tiden  $t = 72,3 \text{ s}$  ger

$$x = 500 \cdot \cos 45^\circ \cdot 72,3 \text{ m} = 25562 \text{ m}$$

c) Om kulan skjuts ut med tillräckligt hög hastighet kommer den att bli en satellit som cirklar runt jorden.

Jordens radie är  $6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$  (höjden 100 m kan vi bortse från). Gravitationskraften är centripetalkraft.

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,0 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^6}} \text{ m/s} = 8100 \text{ m/s}$$

Svar: a) 2,3 km b) 26 km c) 8,1 km/s

167. a) Han siktar mot en punkt som ligger  
(4,00 – 1,20) m = 2,80 m över pistolens mynning.  
Avståndet till väggen är 8,00 m.

Pistolen är således riktad uppåt en vinkel  $\alpha$ , där

$$\tan \alpha = \frac{2,80}{8,00} \Rightarrow \alpha = 19,3^\circ$$

Kulans hastighet i x-led är

$$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha = 90,0 \cdot \cos 19,3^\circ \text{ m/s} = 84,9 \text{ m/s}$$

Det tar tiden  $t$  tills kulan är framme vid väggen.

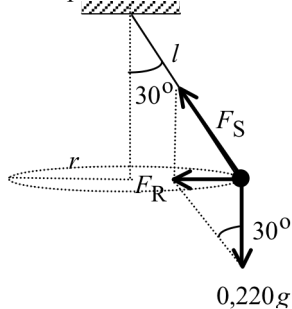
$$t = \frac{x}{v_x} = \frac{8,00}{84,9} \text{ s} = 0,094 \text{ s}$$

- b) På denna tid hinner kulan falla sträckan  $y$ .

$$y = \frac{gt^2}{2} = \frac{9,82 \cdot 0,094^2}{2} \text{ m} = 0,044 \text{ m}$$

Svar: a) 94 ms b) 44 mm under den punkt som han  
siktade på

168. a)  $F_S$  är spännkraften i tråden och  $F_R$  är den resulterande  
centripetalkraften.



Trigonometri ger att

$$\cos 30^\circ = \frac{0,220 \cdot g}{F_S} \Rightarrow F_S = \frac{0,220 \cdot 9,82}{\cos 30^\circ} \text{ N} = 2,5 \text{ N}$$

$$\text{b) } \tan 30^\circ = \frac{F_R}{0,220 \cdot g}$$

$$F_R = 0,220 \cdot 9,82 \cdot \tan 30^\circ \text{ N} = 1,25 \text{ N}$$

Trådens längd  $l = 0,80 \text{ m}$

Radien  $r$  får vi med trigonometri.  $\sin 30^\circ = \frac{r}{l}$

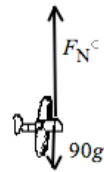
$$r = l \cdot \sin 30^\circ = 0,80 \cdot 0,5 \text{ m} = 0,40 \text{ m}$$

$$F_R = \frac{4\pi^2 \cdot rm}{T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot rm}{F_R}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 0,40 \cdot 0,220}{1,25}} \text{ s} = 1,7 \text{ s}$$

Svar: a) 2,5 N b) 1,7 s

169. I det nedre läget verkar två krafter på piloten, hans egen  
tyngd  $90g = 90 \cdot 9,82 \text{ N} = 884 \text{ N}$  och en normalkraft  $F_N$   
från den stol som han sitter på. Normalkraften är störst  
eftersom den resulterande kraften är centripetalkraft och  
riktad uppåt.

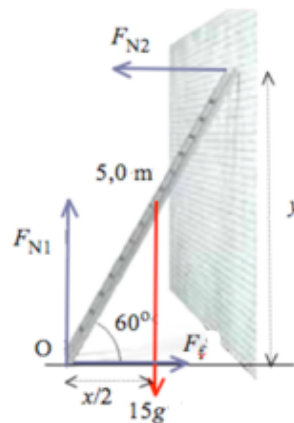


$$F_N - mg = \frac{mv^2}{r}$$

$$F_N = mg + \frac{mv^2}{r} = (90 \cdot 9,82 + \frac{90 \cdot 300^2}{2000}) \text{ N} = 4934 \text{ N}$$

Svar: Tyngden 880 N och normalkraften 4,9 kN

170. Eftersom vi kan bortse från friktion mellan stegen och  
vägg finns endast fyra krafter som verkar på stegen.  
Tyngden  $15g$ , normalkraft från marken  $F_{N1}$ ,  
friktionskraft från marken  $F_f$  och slutligen normalkraft  
från väggen  $F_{N2}$ .



Tyngdpunkten befinner sig mitt på stegen.

Stegen befinner sig i jämvikt, vilket innebär att  
 $15g = F_{N1}$  och  $F_f = F_{N2}$ .

Vi sätter momentpunkten O i den punkt där stegen vilar  
mot marken. De enda krafter som har ett moment med  
avseende på O är då  $F_{N2}$  och  $15g$ . De övriga två  
krafterna verkar ju i O och saknar därför vridande  
moment.

Stegen når sträckan  $y$  upp mot husväggen. Avståndet  
från O till väggen är  $x$ . Dessa bestäms med trigonometri.

$$\sin 60^\circ = \frac{y}{5,0} \Rightarrow y = 5,0 \cdot \sin 60^\circ \text{ m} = 4,33 \text{ m}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{5,0} \Rightarrow x = 5,0 \cdot \cos 60^\circ \text{ m} = 2,5 \text{ m}$$

$F_{N2}$  vridar stegen medurs och har momentarmen  
 $y = 4,33 \text{ m}$ .

$15g$  vridar stegen moturs och har momentarmen  
 $x/2 = 1,25 \text{ m}$ .

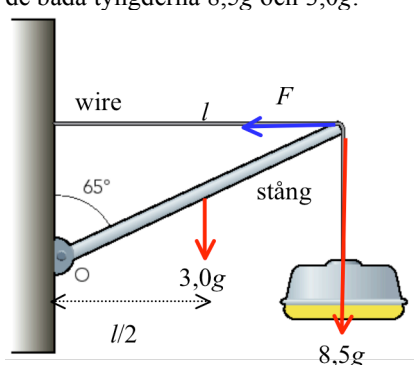
Momentlagen ger:

$$15g \cdot 1,25 = F_{N2} \cdot 4,33$$

$$F_f = F_{N2} = \frac{15 \cdot 9,82 \cdot 1,25}{4,33} \text{ N} = 42,5 \text{ N}$$

Svar: 43 N

171.  $F$  är spännkraften i wiren. De krafter som har ett moment med avseende på momentpunkten O är dels  $F$ , dels också de båda tyngderna  $8,5g$  och  $3,0g$ .



De båda tyngderna vrider stängen medurs och kraften  $F$  vrider moturs.

$F$  har momentarmen  $y$  (se figur), lampans tyngd har momentarmen  $l$  (wires längd) och stängens tyngd har momentarmen  $l/2$  (eftersom tyngdpunkten sitter mitt på stängen).

Trigonometri ger

$$\tan 65^\circ = \frac{l}{y} \Rightarrow y = \frac{l}{\tan 65^\circ}$$

Momentlagen ger

$$F \cdot \frac{l}{\tan 65^\circ} = 3,0g \cdot \frac{l}{2} + 8,5g \cdot l$$

Vi förkortar bort  $l$  och löser ut  $F$ .

$$F = 10g \cdot \tan 65^\circ = 10 \cdot 9,82 \cdot \tan 65^\circ \text{ N} = 211 \text{ N}$$

Svar: 210 N

172. Satelliten rör sig i en omloppsbana runt jorden med omloppstiden  $T = 24 \text{ h} = 24 \cdot 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$ . Gravitationskraften är centripetalkraft.  $M$  är jordens massa,  $m$  är satellitens massa,  $r$  är avståndet till jordens medelpunkt.

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{4\pi^2 \cdot r \cdot m}{T^2}$$

$$r^3 = \frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2} =$$

$$= \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 86400^2}{4\pi^2} = 7,53 \cdot 10^{22}$$

$$r = (7,53 \cdot 10^{22})^{1/3} \text{ m} = 4,2 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Jordens radie är  $6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

Satellitens höjd över jordytan ska då vara

$$h = (4,2 \cdot 10^7 - 6,4 \cdot 10^6) \text{ m} = 3,6 \cdot 10^7 \text{ m} = 36000 \text{ km}$$

Svar: 36000 km

173. För att följa med jorden i dess rotation krävs en

resulterande kraft som är centripetalkraft  $F_c = \frac{4\pi r m}{T^2}$ .

De krafter som verkar på ekvatorn är tyngden  $mg$  och normalkraften  $F_N$ . Resulterande kraft är

$$F_R = mg - F_N.$$

$$\text{Vi sätter } mg - F_N = \frac{4\pi r m}{T^2}.$$

Om omloppstiden  $T$  minskar kommer den nödvändiga centripetalkraften att öka. Det innebär att normalkraften  $F_N$  kommer att minska. Till slut kommer  $F_N = 0$ , vilket innebär att den som befinner sig på ekvatorn kommer att tappa kontakten med marken, dvs. bli avkastad.

$g$  vid ekvatorn är  $9,78 \text{ m/s}^2$  och ekvatorsradien är  $6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

$$\text{Vi får } mg = \frac{4\pi r m}{T^2}, \text{ vilket ger}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r}{g}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 6,38 \cdot 10^6}{9,78}} \text{ s} = 5075 \text{ s} =$$

$$= \frac{5075}{3600} \text{ h} = 1,4 \text{ h}$$

Svar: 1,4 h

174. Trådens längd  $l = 2,5 \text{ m}$ .

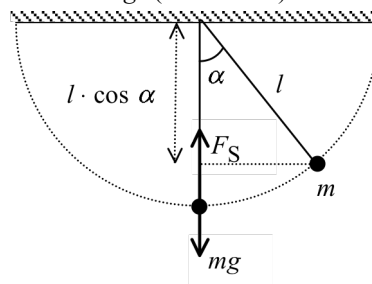
Då vikten är i sitt nedersta läge är risken störst att tråden går av. Vi beräknar vilken hastighet vikten har i detta läge. Vi använder ett energiresonemang. När vikten släpps kommer lägesenergi i utgångsläget att omvandlas till rörelseenergi i nedersta läget. Av figuren nedan framgår att höjden minskar med  $(l - l \cdot \cos \alpha)$ .

Energiprincipen ger att

$$\frac{mv^2}{2} = mg \cdot (l - l \cdot \cos \alpha)$$

vilket ger

$$mv^2 = 2mg \cdot (l - l \cdot \cos \alpha) \quad (1)$$



I nedersta läget verkar tyngdkraften  $mg$  nedåt och sträckkraften i tråden  $F_S$  uppåt. Maximal sträckkraft i tråden är 2,6 N. Resultterande kraft är  $F_S - mg$ . Denna är

$$\text{en centripetalkraft och vi kan skriva } F_S - mg = \frac{mv^2}{r}$$

Insättning av uttrycket från ekv. (1) ger

$$F_S - mg = \frac{2mg \cdot (l - l \cdot \cos \alpha)}{r}$$

Radien i cirkelrörelsen är  $r = l = 2,5$  m.

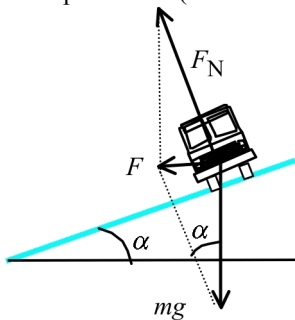
$$F_S - mg = 2mg \cdot (1 - \cos \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{3mg - F_S}{2mg} = \frac{3 \cdot 0,200 \cdot 9,82 - 2,6}{2 \cdot 0,200 \cdot 9,82} = 0,838$$

$$\alpha = 33^\circ$$

Svar:  $33^\circ$

175. Eftersom friktionen är lika med noll, är tyngden  $mg$  och normalkraften  $F_N$  de enda krafter som verkar på bilen. Den resulterande kraften  $F$  till dessa båda krafter är en centripetalkraft. (Vinkeln i figuren är något överdriven.)



Ur den rätvinkliga triangeln får vi

$$\tan \alpha = \frac{F}{mg}$$

$$F = mg \cdot \tan \alpha$$

Om en bil inte skall glida på isfläcken skall den tillgängliga centripetalkraften  $F$  vara lika med den

$$\text{nödvändiga kraften } \frac{mv^2}{r}.$$

$$v = 90 \text{ km/h} = \frac{90}{3,6} \text{ m/s} = 25 \text{ m/s}$$

$$mg \cdot \tan \alpha = \frac{mv^2}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{g \cdot r} = \frac{25^2}{9,82 \cdot 400} = 0,159 \Rightarrow \alpha = 9,0^\circ$$

Svar:  $9^\circ$

176. Kastvinkeln är  $\alpha = -14^\circ$ .

Bollens hastighet i  $x$ -led är

$$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha = 40,0 \cdot \cos(-14^\circ) \text{ m/s} = 38,8 \text{ m/s}$$

och i  $y$ -led

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha = 40,0 \cdot \sin(-14^\circ) \text{ m/s} = -9,68 \text{ m/s}$$

Bollen är framme vid nätet efter tiden  $t$ , där

$$6,0 = 38,8 \cdot t \Rightarrow t = \frac{6,0}{38,8} \text{ s} = 0,155 \text{ s}$$

Vi låter bollen slås från origo.

Efter tiden  $t$  befinner den sig då i  $y$ -kooordinaten

$$y = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

$$(-9,68 \cdot 0,155 - \frac{9,82 \cdot 0,155^2}{2}) \text{ m} = -1,61 \text{ m}$$

Bollen befinner sig således 1,61 m under den punkt från vilken den slogs, dvs. den är på höjden

$$(2,60 - 1,61) \text{ m} = 0,99 \text{ m} \text{ över golvet.}$$

Nätets höjd är 0,92 m.

Bollen passerar således nätet 7 cm över detta.

Svar: Ja, den passerar 7 cm över nätet.

177. Vi bortser som vanligt från luftmotstånd. Vattnet sprutas med hastigheten 8,0 m/s i en riktning snett uppåt med vinkeln  $\alpha$ .

Hastigheten komponentuppdelas i  $x$ - och i  $y$ -led.

$$v_{ox} = 8,0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{oy} = 8,0 \cdot \sin \alpha$$

Vattnet sprutas 5,0 m i horisontell led på tiden  $t$ , där

$$5,0 = 8,0 \cdot \cos \alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{5,0}{8,0 \cdot \cos \alpha}$$

Efter denna tid är vattnet nere vid marknivån, dvs.  $y = 0$  m

$$y = 8,0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Insättning av tiden  $t$  ger

$$0 = 8,0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{5,0}{8,0 \cdot \cos \alpha} - \frac{g}{2} \cdot \left( \frac{5,0}{8,0 \cdot \cos \alpha} \right)^2$$

$$0 = 5,0 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{25g}{128 \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{5g}{128 \cdot \cos \alpha} = \sin \alpha$$

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{5g}{64}$$

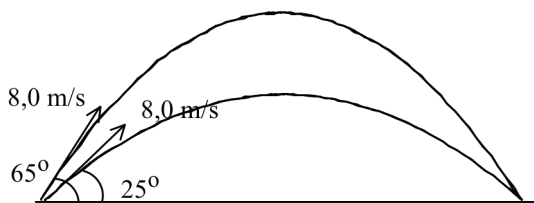
$$\sin 2\alpha = \frac{5g}{64} = \frac{5 \cdot 9,82}{64} = 0,767$$

(Obs. formeln  $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ )

$$2\alpha = 50^\circ \text{ eller } 2\alpha = (180^\circ - 50^\circ) = 130^\circ$$

$$\alpha = 25^\circ \text{ eller } \alpha = 65^\circ$$





Parabeln beskrivs matematiskt av en andragradsfunktion.

Ekvationen  $0 = 8,0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$  ger två olika lösningar för tiden  $t$ , vilket medför olika värden på vinkeln  $\alpha$ .

Svar: 25° eller 65°

178. a) Stötens längd är  $x = 17,25$  m.  
Utgångshastigheten är  $v_0$ . Denna hastighet  
komposantuppdelas i  $v_{0x}$  resp.  $v_{0y}$ .

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos 45^\circ$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin 45^\circ$$

Med origo i kastarens hand vid utkastet får vi att kulan  
landar i punkten med koordinaterna  $(17,25, -2,0)$ .

Låt  $t$  vara tiden för kastet.

I  $x$ -led gäller:  $x = v_{0x} \cdot t$

$$17,25 = v_0 \cdot \cos 45^\circ \cdot t$$

$$t = \frac{17,25}{v_0 \cdot \cos 45^\circ}$$

I  $y$ -led gäller:  $y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$

Insättning av  $y = -2,0$  och värdet för tiden  $t$  ovan ger:

$$-2,0 = v_0 \cdot \sin 45^\circ \cdot \frac{17,25}{v_0 \cdot \cos 45^\circ} - \frac{g}{2} \cdot \left( \frac{17,25}{v_0 \cdot \cos 45^\circ} \right)^2$$

$$-2,0 = 17,25 - \frac{g \cdot 17,25^2}{v_0^2}$$

$$\frac{g \cdot 17,25^2}{v_0^2} = 17,25 + 2,0 = 19,25$$

$$v_0^2 = \frac{g \cdot 17,25^2}{19,25}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9,82 \cdot 17,25^2}{19,25}} \text{ m/s} = 12,3 \text{ m/s}$$

- b) Tyngdaccelerationen  $g$  på en himlakropp med massan

$M$  och raden  $r$  är enligt gravitationslagen  $g = G \cdot \frac{M}{r^2}$ .

Data om månen hämtas i formelsamling.

$$g_{\text{månen}} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7,35 \cdot 10^{22}}{(1,738 \cdot 10^6)^2} \text{ m/s}^2 = 1,62 \text{ m/s}^2$$

Vi låter kastaren kasta med utgångshastigheten  
 $v_0 = 12,3$  m/s och att  $g$  endast är  $1,62 \text{ m/s}^2$ . Kastvinkeln  
är fortfarande  $45^\circ$ .

Vi beräknar tiden för kastet med  $y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$ .

$$-2,0 = v_0 \cdot \sin 45^\circ \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$t^2 - \frac{2v_0 \sin 45^\circ}{g} \cdot t - \frac{2 \cdot 0 \cdot 2}{g} = 0$$

Denna andragradsekvation har lösningarna  $t_1 = 10,98$  s  
och  $t_2 = -0,22$  s, där endast  $t_1 = 10,98$  s är realistiskt.

Obs. att vi har räknat med  $g = 1,62 \text{ m/s}^2$ .

Kastvidden är

$$x = v_{0x} \cdot t = 12,3 \cdot \cos 45^\circ \cdot 10,98 \text{ m} = 96 \text{ m}$$

Svar: a) 12 m/s b) 96 m

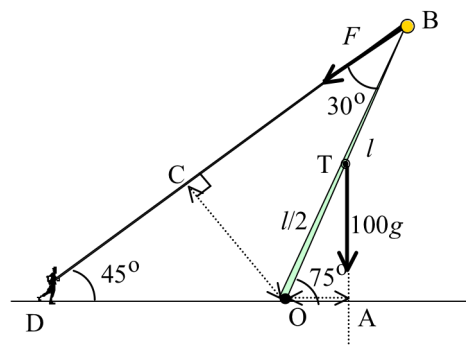
179. Flaggstångens längd är  $l$ .  
Man drar med kraften  $F$ . Se figur.  
Denna kraft har momentarmen  $OC$ ,  
med avseende på momentpunkten  $O$ .

$$\sin 30^\circ = \frac{OC}{l} \Rightarrow OC = l \cdot \sin 30^\circ$$

Tyngden  $100g$  har momentarmen  $OA$ .

Vinkeln  $AOT$  är  $75^\circ$ . Den är yttervinkel till triangeln  
DOB. Vinkeln  $ATO$  är således  $(90^\circ - 75^\circ) = 15^\circ$ .

$$\sin 15^\circ = \frac{OA}{l/2} \Rightarrow OA = \frac{l}{2} \cdot \sin 15^\circ$$



Momentlagen ger

$$F \cdot OC = 100g \cdot OA$$

$$F \cdot l \cdot \sin 30^\circ = 100g \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin 15^\circ$$

$$F = 100 \cdot 9,82 \cdot \frac{\sin 15^\circ}{2 \cdot \sin 30^\circ} \text{ N} = 254 \text{ N}$$

Svar: 250 N

180. Eftersom jorden enligt antagandet är ett homogent klot är gravitationskraften på henne lika stor överallt.

$$F_J = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2} \text{ N} = 9,81 \cdot m$$

När hon står på marken påverkas hon av  $F_J$  och av normalkraften  $F_N$ .

Eftersom jorden roterar är inte dessa båda krafter exakt lika stora. På ekvatorn är  $F_J - F_N$  en centripetalkraft riktad nedåt.

$$F_N = F_J - \frac{4\pi^2 rm}{T^2} = (m \cdot 9,81 - \frac{4\pi^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \cdot m}{(24 \cdot 3600)^2}) \text{ N} =$$

$$= m \cdot 9,81 - m \cdot 0,034 = m \cdot 9,78$$

Hennes tyngd på ekvatorn jämfört med vid polen är

$$\frac{9,78 \cdot m}{9,81 \cdot m} = 0,997$$

Svar: Hon känner sig 0,3% lättare.