Harmonisk svängningsrörelse

Om vi kombinerar uttrycket för den resulterande kraften i ett fjäder-vikt system med Newtons andra lag får vi:

$$F_R = -ky = ma$$

dvs.

$$y = -\frac{m}{k}a \qquad (1)$$

där elongationen y anger viktens läge i förhållande till jämviktsläget.

Om vi derivera en funktion för läget, så får vi en funktion för hastigheten och deriverar vi en gång till får vi en funktion för accelerationen. Det innebär att:

$$y' = v$$

$$y'' = a$$

Sätter vi detta i ekvation (1) får vi:

$$y'' = -\frac{k}{m}y$$

Eller

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0 \qquad (2)$$

Den här typen av ekvation som innehåller både en funktion och dess andraderivata kallas för differentialekvation. Lösningen till denna typ av differentialekvation är en funktion sådan att dess andraderivata liknar den ursprungliga funktionen. Exponentialfunktioner liksom sinusfunktioner har just den egenskapen, men eftersom fjäder-vikt systemet är ett periodiskt system, väljer vi en sinusfunktion som beskriver elongationen y.

Vi ansätter att elongationen ges av funktionen

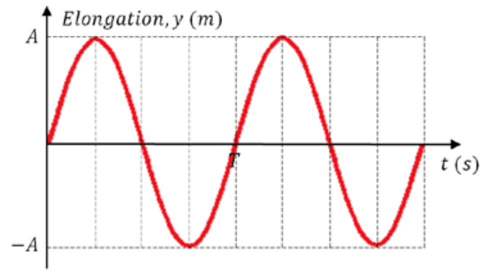
$$\boxed{y = A\sin(\omega t)} \qquad (3)$$

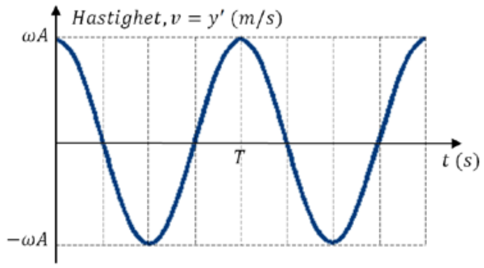
där A är svängningens amplitud och ω är vinkelhastigheten.

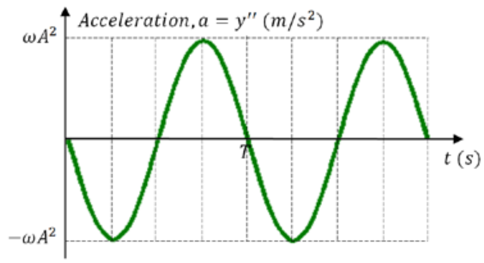
Om vi deriverar (3) två gånger får vi uttrycken för vågrörelsens hastighet respektive acceleration. Då är

$$v = y' = \omega A cos(\omega t) \qquad (4)$$

$$a = y'' = -\omega^2 A sin(\omega t) \qquad (5)$$







Sätter vi (3) och (5) i (2) så får vi

$$-\omega^2 A sin(\omega t) + \frac{k}{m} A sin(\omega t) = 0$$

eller

$$A sin(\omega t) \cdot \left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) = 0 \qquad (6)$$

Vi ser att $y = A sin(\omega t)$ är en lösning till (2) om bara vinkelhastigheten ω uppfyller villkoret

$$-\omega^2 + \frac{k}{m} = 0$$

Det innebär att vinkelhastigheten för en vikt som svänger upp och ner i en fjäder är

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (7)$$

Vi vet från matematiken att

$$-1 \leq \sin(\omega t) \leq 1 \qquad (8)$$

$$-1 \leq \cos(\omega t) \leq 1 \qquad (9)$$

(8) och (4) ger den maximala hastigheten och (9) och (5) ger den maximala accelerationen.

$$v_{max} = \omega A$$

$$a_{max} = \omega^2 A$$

Utifrån formeln för elongation samt (7) kan vi härleda ett uttryck för viktens svängningstid T.

$$y = Asin(\omega t) = Asin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

En sinusfunktion har perioden 2π. Det innebär att om T är tiden för en hel period så måste

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot T = 2\pi$$

Vilket ger

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (10)$$

Där m är viktens massa i kg och k är fjäderkonstanten i N/m.

Av (10) framgår att en kraftig fjäder (stort k) kommer att få vikten att röra sig snabbare fram och tillbaka, så att periodtiden blir kortare. Om viktens massa är stor kommer trögheten att göra periodtiden längre. Lägg märke till att periodtiden inte beror på svängningens amplitud. Den längre sträckan kompenseras av att vikten svänger med högre hastighet.