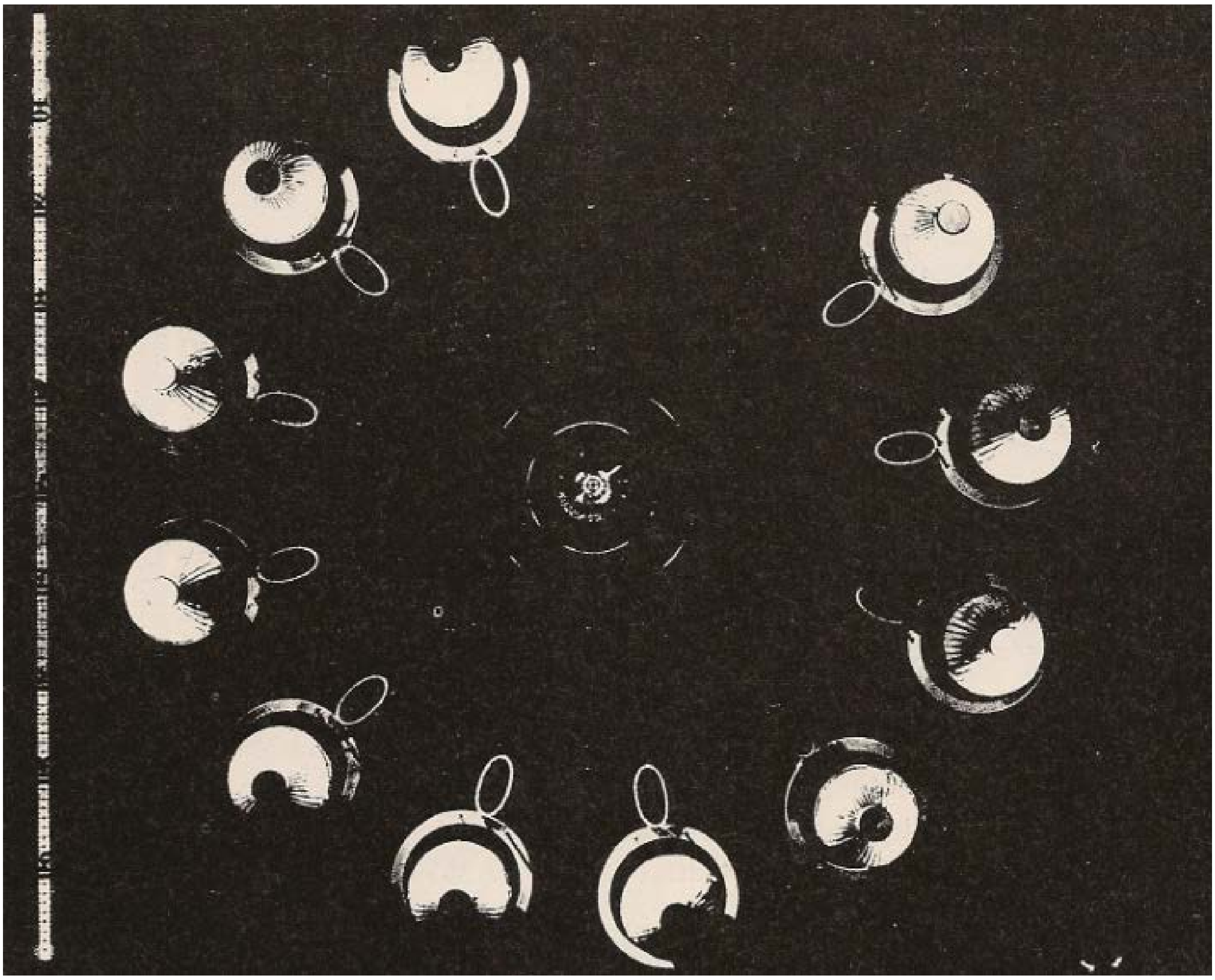
Cirkulär centralrörelse

Enligt tröghetslagen rör sig en kropp rakt fram, såvida inte resultanten till de krafter som verkar tvingar den att ändra rörelseriktning. For att ett föremål skall röra sig längs en krökt bana fordras alltså att det oavbrutet påverkas av en avböjande kraft.

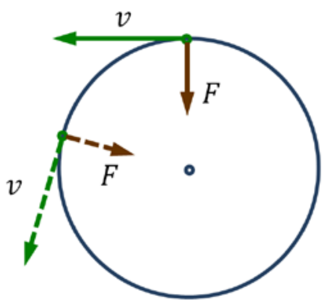
Med den försöksanordning som visas i figuren nedan kan man få en skiva med kolsyreis att röra sig i cirkel. Rörelsen är fotograferad i stroboskopsbelysning. Vilka krafter orsakar cirkelrörelsen?



Skivans cirkelrörelse fotograferad i stroboskopbelysning. Skivans fart är konstant. Vidare är den ringformade fjädern lika mycket sträckt i varje läge, vilket innebär att kraften från fjädern hela tiden har samma storlek.

Eftersom tyngd och normalkraft tar ut varandra och rörelsen är praktiskt taget friktionsfri, är kraften från den ringformade fjädern den enda kraft som påverkar skivans rörelse. Den kraften är ständigt riktad inåt mot cirkelns medelpunkt.

Av fotot framgår att fjädern är sträckt till samma längd hela tiden, och vi drar slutsatsen, att kraftens storlek är konstant. Vi ser också att brickans fart trots kraften från fjädern ständigt är detsamma. Det beror på att kraften i varje ögonblick är vinkelrät mot rörelseriktningen. Kraften utför därför inget arbete, och skivans rörelseenergi förändras inte.



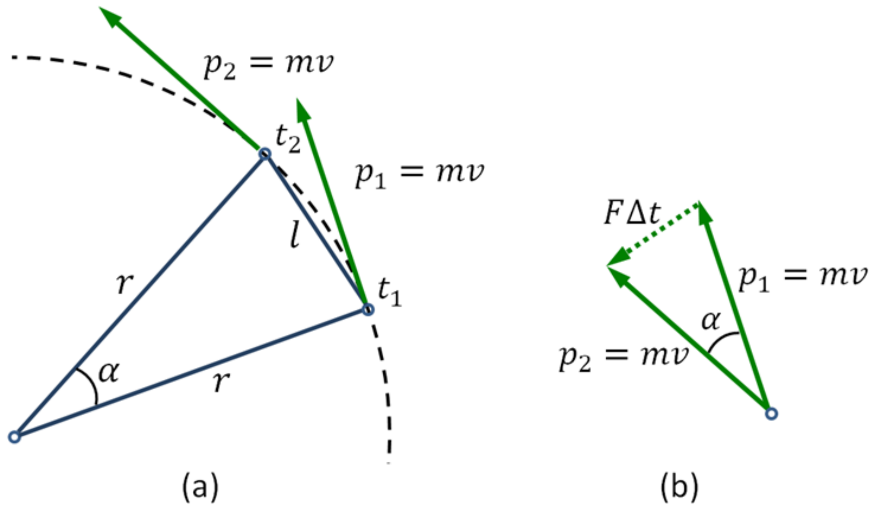
Vid cirkulär rörelse med konstant fart v verkar en kraft F med konstant storlek i riktning mot cirkels centrum.

Sammanfattningsvis:

> Då en kropp rör sig i cirkelbana med konstant fart, påverkas den av en kraftresultant med konstant storlek, riktad mot banans centrum.

Ett föremål med massa m rör sig med konstant fart v i en cirkel med radien r. Hur stor är den kraft som verkar på föremålet?

Vi tillämpar impulslagen $\vec{I} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$ på rörelsen. Figuren nedan (a) visar föremålets lägen och rörelsemängder $\overrightarrow{p_1}$ och $\overrightarrow{p_2}$ vid två olika tidpunkter t_1 och t_2. Rörelsemängdens riktning ändras ständigt, men dess belopp är hela tiden lika med mv. Den impuls föremålet får under tiden $\Delta t = t_2 - t_1$ kan skrivas $\vec{I} = \vec{F}\Delta t$, där $\vec{F}$ är medelvärdet av kraftresultanten under tiden Δt. Figur (b) nedan återger vektorsambandet mellan impulsen och rörelsemängderna.



Figur (a) visar kroppens läge och rörelsemängd vid två olika tidpunkter t_1 och t_2. I figur (b) orsakar impulsen $\vec{F}\Delta t$ enligt impulslagen rörelsemängdsändringen $\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$.

De två likbenta trianglarna i figuren ovan är likformiga, eftersom rörelsemängdsvektorn under tidsintervallet Δt vridit sig samma vinkel α som radien r. Av likformigheten följer:

$$\frac{l}{r} = \frac{F\Delta t}{mv} \Longrightarrow F = \frac{mv}{r} \cdot \frac{l}{\Delta t}$$

För att få momentanvärdet på kraftresultanten $\vec{F}$ väljer vi ett allt mindre tidsintervall Δt. De två lägena på cirkeln i figur (a) närmar sig då varandra, och sträckan l skiljer sig allt mindre från längden av cirkelbågen mellan lägena. Den bågen har föremålet tillryggalagt under tiden Δt, och dess längd är därför $v\Delta t$. Vid mycket små tidsintervall kan l ersättas med $v\Delta t$:

$$\frac{l}{\Delta t} = \frac{v\Delta t}{\Delta t} = v$$

Det ger oss följande värde på F:

$$F = \frac{mv}{r} \cdot v$$

För att ett föremål med massa m ska röra sig med konstant fart v i en cirkelbana med radien r måste alltså resultanten till de krafter som verkar hela tiden ha storleken F:

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

Figur (b) ger oss också en kontroll av kraftens riktning. När Δt går mot noll går även vinkel α mot noll, och i gränsläget blir impulsen $\vec{F}\Delta t$ och därmed kraftresultanten $\vec{F}$ vinkelrät mot rörelsemängsvektorn. I varje ögonblick är kraftresultanten därför riktad inåt mot cirkelns medelpunkt. Av det skälet kallas den ofta *centripetalkraft*, som betyder ”centralinriktad” kraft.

Av kraftekvationen $\vec{F} = m\vec{a}$ följer att accelerationen vid cirkulär rörelse med konstant fart också är riktad mot centrum. *Centripetalaccelerationens* storlek är:

$$a_c = \frac{F}{m} = \frac{v^2}{r}$$

Eftersom tiden det tar för föremålet att rotera ett varv är T (omloppstiden) och cirkelns omkrets är $2\pi r$ kan vi också uttrycka hastigheten v som:

$$v = \frac{l}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T}$$

Vi sätter in detta för v i uttrycket för a_c och får då:

$$a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Ibland vill man istället tala om vilken frekvens f som rotationen har, dvs. hur många varv föremålet roterar varje sekund. Enheten för frekvens är $1\ Hz = 1\ s^{-1}$. Sambandet mellan frekvens och omloppstid är $f = 1/T$. Vi får då:

$$a_c = 4\pi^2 r f^2$$

Ytterligare ett användbart begrepp i samband med roterande rörelser är *vinkelhastigheten* ω, som anger med vilken hastighet vinkeln α ökar. Enheten för vinkelhastigheten är 1 radian/s, som man förkortar 1 rad/s eller bara 1 s^{-1}.

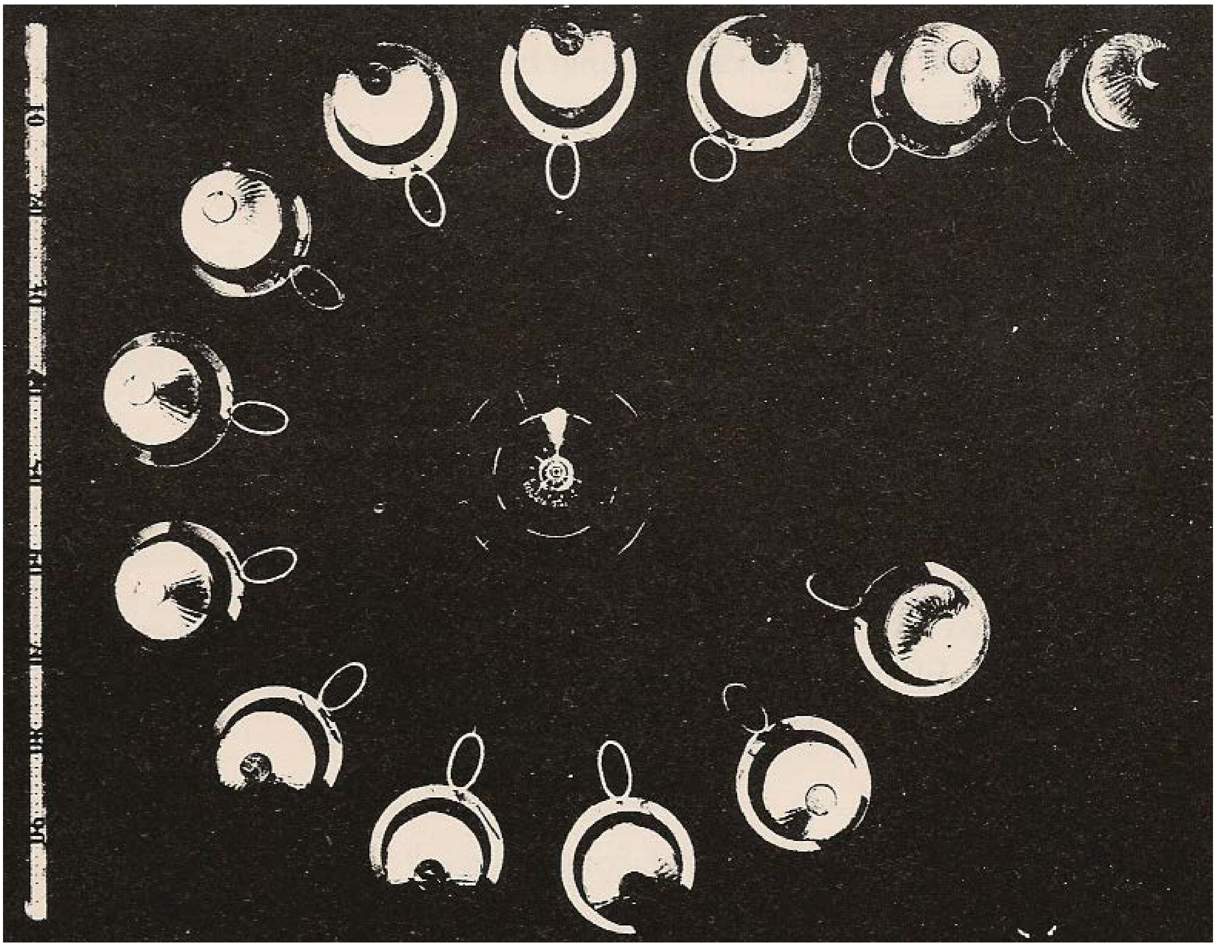
Eftersom ett varv passerar på tiden T och ett varv motsvarar vinkeln 2π radianer gäller att:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Vi har då ytterligare ett sätt att skriva accelerationen, nämligen:

$$a_c = \omega^2 r$$

Anta att den tråd som tvingar skivan i figuren på sida 1 att röra sig i cirkel plötsligt går av. Enligt tröghetslagen skall skivan fortsätta rätlinjigt med den hastighet den har då centripetalkraften upphör. I figuren nedan bränns tråden av med en liten låga. Observera att skivan därefter rör sig längs en *tangent* till cirkeln, inte längs en radie.



Serieblixtfotografi av en skiva under centralrörelse. När skivan befinner sig längst upp på fotot, bränns tråden av, och skivan fortsätter längs en rät linje med den hastighet den hade då tråden gick av.